Uitwerkingen hoofdstuk 22 deel vwo B 1,2 6

Rijen en formules

1.

a. $u_n = \dfrac{6}{u_{n-1}+1}$ met $u_0 = 3 \Rightarrow u_1 = \dfrac{6}{u_0+1} = \dfrac{6}{3+1} = 1,5$

$u_2 = \dfrac{6}{u_1+1} = \dfrac{6}{1,5+1} = 2,4$; $u_3 = \dfrac{6}{u_2+1} = \dfrac{6}{2,4+1} = \dfrac{30}{17}$

b. $u_n = \dfrac{6}{u_{n-1}+1}$ met $u_0 = 2 \Rightarrow u_1 = \dfrac{6}{u_0+1} = \dfrac{6}{2+1} = 2$

$u_2 = \dfrac{6}{u_1+1} = \dfrac{6}{2+1} = 2$; $u_3 = \dfrac{6}{u_2+1} = \dfrac{6}{2+1} = 2$

2. $u_n = \dfrac{10}{u_{n-1}+2}$ met $u_2 = -2 \Rightarrow$ $-2 = \dfrac{10}{u_1+2} \Leftrightarrow -2u_1 - 4 = 10 \Leftrightarrow -2u_1 = 14 \Leftrightarrow u_1 = -7 \Rightarrow$

$-7 = \dfrac{10}{u_0+2} \Leftrightarrow -7u_0 - 14 = 10 \Leftrightarrow -7u_0 = 24 \Leftrightarrow u_0 = -3\tfrac{3}{7}$

3 $u_{n+1} = \dfrac{10}{u_n - 3}$

a. $u_0 = 6 \Rightarrow u_1 = \dfrac{10}{6-3} = \dfrac{10}{3} \Rightarrow u_2 = \dfrac{10}{\frac{10}{3}-3} = \dfrac{30}{10-9} = 30 \Rightarrow u_3 = \dfrac{10}{30-3} = \dfrac{10}{27}$

b. $u_1 = \dfrac{10}{5-3} = 5 = u_0 \Rightarrow u_0 = u_1 = u_2 = \ldots\ldots = 5$ $\Rightarrow$ Alle termen zijn 5 $\Rightarrow$ constante rij.

c. $u_1 = \dfrac{10}{\frac{19}{3}-3} = \dfrac{30}{19-9} = 3 \Rightarrow u_2 = \dfrac{10}{3-3}$ en dit kan niet $\Rightarrow$ Deze rij bestaat alleen uit de termen $u_0 = \frac{19}{3}$ en $u_1 = 2$

4. $u_n = \dfrac{u_{n-1}}{u_{n-1} - 2}$ met startwaarde u_0.

a. $u_1 = \dfrac{6}{6-2} = 1{,}5 \Rightarrow u_2 = \dfrac{1{,}5}{1{,}5-2} = -3 \Rightarrow u_3 = \dfrac{-3}{-3-2} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow u_4 = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}-2} = \dfrac{3}{3-10} = -\dfrac{3}{7}$

b. $u_5 = 3 \Rightarrow u_6 = \dfrac{u_5}{u_5 - 2} = \dfrac{3}{3-2} = 3 \Rightarrow u_5 = u_6 = u_7 = u_8 = u_9 = 3$

$u_5 = \dfrac{u_4}{u_4 - 2} \Rightarrow 3 = \dfrac{u_4}{u_4 - 2} \Leftrightarrow 3u_4 - 6 = u_4 \Leftrightarrow 2u_4 = 6 \Leftrightarrow u_4 = 3 \Rightarrow$
$u_5 = u_4 = u_3 = u_2 = u_2 = u_1 = u_0 = 3$

c. $u_2 = 2 \Rightarrow u_2 = 2 = \dfrac{u_1}{u_1 - 2} \Rightarrow 2u_1 - 4 = u_1 \Leftrightarrow u_1 = 4 \Rightarrow 4 = \dfrac{u_0}{u_0 - 2} \Rightarrow 4u_0 - 8 = u_0 \Leftrightarrow u_0 = \frac{8}{3}$

Verder geldt: $u_3 = \dfrac{u_2}{u_2 - 2} = \dfrac{2}{2-2}$ en dit kan niet $\Rightarrow$ Deze rij bestaat dus alleen uit de termen u_0 , u_1 en u_2 dus : $u_0 = \frac{8}{3}$, u_1 =4 en $u_2 = 2$

5. $u_n = 2.u_{n-1} + 4$ met $u_0 = 3$

a. $v_0 = 444 \Rightarrow v_1 = 0{,}5.444 - 2 = 220$; $v_2 = 0{,}5.220 - 2 = 108$; $v_3 = 0{,}5.108 - 2 = 52$;
$v_4 = 0{,}5.52 - 2 = 24$; $v_5 = 0{,}5.24 - 2 = 10$; $v_6 = 0{,}5.10 - 2 = 3$

Je kunt natuurlijk met de opdracht 444 enter en dan *ans*.0,5-2 enter enz. ook aan de 7 termen komen.

b. We moeten de terugweg berekenen. $\Rightarrow$ we moeten dus u_{n-1} uitdrukken in u_n $\Rightarrow$

$u_n = 2u_{n-1} + 4 \Leftrightarrow 2u_{n-1} = u_n - 4 \Leftrightarrow u_{n-1} = \frac{1}{2}u_n - 2$ Hiermee kunnen we de voorgaande termen berekenen. $\Rightarrow$ Met $v_n = 0{,}5v_{n-1} - 2$ kunnen we dus de termen in omgekeerde volgorde berekenen.

6a. $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$ met $u_0 = a$ en $u_5 = 2$ $\Rightarrow$ omkeerrij: $0{,}5u_n = u_{n+1} + 3 \Leftrightarrow u_n = 2u_{n+1} + 6$ $\Rightarrow$ de omkeerrij is : $v_{n+1} = 2v_n + 6$ met $v_0 = 2$ $\Rightarrow$ $v_1 = 10$; $v_2 = 26$; $v_3 = 58$; $v_4 = 122$ en $v_5 = 250$ $\Rightarrow$ $a = 250$

b. $u_n = \dfrac{10}{u_{n-1}} + 1 \Leftrightarrow u_n - 1 = \dfrac{10}{u_{n-1}} \Leftrightarrow \dfrac{u_{n-1}}{10} = \dfrac{1}{u_n - 1} \Leftrightarrow u_{n-1} = \dfrac{10}{u_n - 1}$ $\Rightarrow$

De omkeerrij is dus: $v_n = \dfrac{10}{v_{n-1} - 1}$ met $v_0 = 6$

Dit invoeren in GR $\Rightarrow$ $v_4 = 90$ $\Rightarrow$
$a = 90$

n	v(n)
0	6
1	2
2	10
3	1.1111
4	90
5	.11236
6	-11.27

n=0

c. $u_n = \sqrt{u_{n-1} + 4}$ met $u_0 = a$ en $u_3 = 3$

$u_n = \sqrt{u_{n-1} + 4}$ kwadrateren $\Rightarrow u_{n-1} + 4 = (u_n)^2 \Rightarrow u_{n-1} = (u_n)^2 - 4$ $\Rightarrow$ De omkeerrij is dus:
$v_n = (v_{n-1})^2 - 4$ met $v_0 = 3$ $\Rightarrow$ $v_1 = 5$ dan $v_2 = 21$ en dus $v_3 = 441 - 4 = 437$ $\Rightarrow$ $a = 437$

7. $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n - 2}$

a. Voor een constante rij moet gelden dat :
$u_{n+1} = u_n = c \Rightarrow c = \dfrac{3c}{c-2} \Leftrightarrow c^2 - 2c = 3c \Leftrightarrow c^2 - 5c = 0 \Leftrightarrow c(c-5) = 0$ $\Rightarrow$ $c = 5 \vee c = 0$ $\Rightarrow$
Voor $u_0 = 5 \vee u_0 = 0$ krijgen we een constante rij.

b. u_5 is niet gedefinieerd als $u_4 = 2$, want dan ben je niet in staat om u_5 te berekenen (noemer is dan 0)

We gaan eerst de omkeerrij berekenen $\Rightarrow$ $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n - 2} \Leftrightarrow u_{n+1}.u_n - 2u_{n+1} = 3u_n$ $\Leftrightarrow$

$u_n(u_{n+1} - 3) = 2u_{n+1} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{2u_{n+1}}{u_{n+1} - 3}$ De omkeerrij is dus : $v_{n+1} = \dfrac{2v_n}{v_n - 3}$ met $v_0 = 2$ $\Rightarrow$

$v_1 = \dfrac{4}{-1} = -4 \Rightarrow v_2 = \dfrac{-8}{-7} = \dfrac{8}{7} \Rightarrow v_3 = \dfrac{2.\frac{8}{7}}{\frac{8}{7}-3} = \dfrac{16}{-13} = -\dfrac{16}{13} \Rightarrow v_4 = \dfrac{-\frac{32}{13}}{-\frac{16}{13}-3} = \dfrac{32}{16+39} = \dfrac{32}{55}$ Dit is de vijfde term. $\Rightarrow$ Bij de rij : $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n - 2}$ met $u_0 = \frac{32}{55}$ bestaan alleen de eerste vijf termen .

8. Gegeven: $u_{n+1} = \dfrac{-3}{u_n + 2}$

a. Deze rij is constant als geldt: $u_{n+1} = u_n = c \Rightarrow c = \dfrac{-3}{c+2} \Leftrightarrow c^2 + 2c = -3 \Leftrightarrow c^2 + 2c + 3 = 0 \Rightarrow$
D = 4 – 12 = -8 < 0 $\Rightarrow$ er zijn dus geen waarden voor c te vinden zodat de gegeven rij constant is.

b. u_5 bestaat niet als geldt dat $u_4 = -2$ We gaan weer de omkeerrij berekenen van de gegeven rij.
$\Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{-3}{u_n + 2} \Rightarrow u_{n+1}.u_n + 2.u_{n+1} = -3 \Leftrightarrow u_n.u_{n+1} = -3 - 2.u_{n+1} \Rightarrow u_n = \dfrac{-3-2u_{n+1}}{u_{n+1}} \Rightarrow$
De omkeerrij wordt dus: $v_{n+1} = \dfrac{-3-2.v_n}{v_n}$ met $v_0 = -2 \Rightarrow$

$v_1 = \dfrac{-3-2.-2}{-2} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow v_2 = \dfrac{-3-2.-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{-6+2}{-1} = 4 \Rightarrow v_3 = \dfrac{-3-2.4}{4} = -\dfrac{11}{4}$

$\Rightarrow v_4 = \dfrac{-3-2.-\frac{11}{4}}{-\frac{11}{4}} = \dfrac{-12+22}{-11} = -\dfrac{10}{11}$ $\Rightarrow$ Van de rij $u_{n+1} = \dfrac{-3}{u_n + 2}$ met $u_0 = -\frac{10}{11}$ bestaan alleen de eerste 5 termen.

9. Gegeven de rij : $u_n = \dfrac{2}{u_{n-1}}$ met $u_0 = a$ (a is niet 0)

a. $u_0 = 4 \Rightarrow u_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \Rightarrow u_2 = \dfrac{2}{\frac{1}{2}} = 4; \Rightarrow u_3 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \Rightarrow u_4 = 4; \Rightarrow u_5 = \frac{1}{2}$

b. $u_0 = 5 \Rightarrow u_1 = \dfrac{2}{5}; \Rightarrow u_2 = \dfrac{2}{\frac{2}{5}} = 5; \Rightarrow u_3 = \dfrac{2}{5}; \Rightarrow u_4 = 5; \Rightarrow u_5 = \dfrac{2}{5}$

c. Neem $u_0 = a \Rightarrow u_1 = \dfrac{2}{a}; \Rightarrow u_2 = \dfrac{2}{\frac{2}{a}} = a; \Rightarrow u_3 = \dfrac{2}{a}; \Rightarrow u_4 = a\ ; \Rightarrow u_5 = \dfrac{2}{a}$

10. Gegeven : $u_n = -u_{n-1} + 10$ met $u_0 = a$

a. Voor een constante rij geldt: $u_n = u_{n-1} = c \Rightarrow c = -c + 10 \Leftrightarrow 2c = 10 \Leftrightarrow c = 5$ $\Rightarrow$ De rij met $u_n = -u_{n-1} + 10$ met u_0 = a = 5 is dus een constante rij.

b. Stel $u_0 = a \Rightarrow u_1 = -a + 10$; $\Rightarrow u_2 = -(-a + 10) + 10 = a - 10 + 10 = a$ $\Rightarrow$ Voor elke $a \neq 5$ geldt dat de rij periodiek is met periode 2.

11. Gegeven de rij : $u_n = \dfrac{2u_{n-1} - 2}{u_{n-1}}$ met $u_0 = a$

a. u_n bestaat niet als $u_{n-1} = 0$

Als $a = u_0 = 0$ dan bestaat u_1 niet $\Rightarrow$ de rij bestaat uit één term namelijk $u_0 = 0$
Als $u_1 = 0$ dan bestaat u_2 niet $\Rightarrow$: $0 = \dfrac{2.u_0 - 2}{u_0} \Rightarrow 2.u_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow u_0 = 1$ $\Rightarrow$ Nu bestaat de rij alleen uit de termen : $u_0 = 1$ en $u_1 = 0$. Nu geldt dus $a = u_0 = 1$
Als $u_2 = 0$ dan bestaat u_3 niet $\Rightarrow$
$0 = \dfrac{2.u_1 - 2}{u_1} \Rightarrow 2.u_1 - 2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 1 \Rightarrow 1 = \dfrac{2u_0 - 2}{u_0} \Rightarrow u_0 = 2u_0 - 2 \Leftrightarrow u_0 = 2$ $\Rightarrow$ Nu bestaat de rij alleen uit de termen : $u_0 = 2$; $u_1 = 1$ en $u_2 = 0$ Dit geldt dus voor $a = u_0 = 2$

b. Stel u_0 = a $\Rightarrow$ $u_1 = \dfrac{2a - 2}{a} = 2 - \dfrac{2}{a} \Rightarrow u_2 = \dfrac{2\left(2 - \dfrac{2}{a}\right) - 2}{2 - \dfrac{2}{a}} = \dfrac{4 - \dfrac{4}{a} - 2}{2 - \dfrac{2}{a}} = \dfrac{2 - \dfrac{4}{a}}{2 - \dfrac{2}{a}} = \dfrac{2a - 4}{2a - 2} = \dfrac{a - 2}{a - 1}$

$$u_3 = \frac{2.\dfrac{a-2}{a-1} - 2}{\dfrac{a-2}{a-1}} . \frac{a-1}{a-1} = \frac{2(a-2) - 2(a-1)}{a-2} = \frac{2a - 4 - 2a + 2}{a-2} = \frac{-2}{a-2}$$

$$u_4 = \frac{2.\left(\dfrac{-2}{a-2}\right) - 2}{\dfrac{-2}{a-2}} = \frac{\dfrac{-4}{a-2} - 2}{\dfrac{-2}{a-2}} . \frac{a-2}{a-2} = \frac{-4 - 2(a-2)}{-2} = \frac{-4 - 2a + 4}{-2} = \frac{-2a}{-2} = a$$

$\Rightarrow$ Voor elke $a \neq 0,1$ en 2 is de rij periodiek met periode 4.

12. Gegeven de rij : $u_n = \dfrac{u_{n-1} - 1}{u_{n-1} + 1}$ met $u_0 = a$

a. Voor een constante rij geldt : $u_n = u_{n-1} = c \Rightarrow c = \dfrac{c-1}{c+1} \Rightarrow c^2 + c = c - 1 \Leftrightarrow c^2 = -1 \Rightarrow$
Er zijn geen waarden van c te vinden waardoor de rij constant wordt.

b. De rij breekt af als $u_{n-1} = -1$
Als $u_0 = a = -1$ dan bestaat de rij uit één term namelijk $u_0 = -1$
Als $u_1 = -1$ dan $-1 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} \Rightarrow -u_0 - 1 = u_0 - 1 \Leftrightarrow 2u_0 = 0 \Leftrightarrow u_0 = 0 \Rightarrow$
Als $a = u_0 = 0$ dan krijgen we de rij : $u_0 = 0$; $u_1 = -1$
Als $u_2 = -1$ dan $-1 = \dfrac{u_1 - 1}{u_1 + 1} \Rightarrow -u_1 - 1 = u_1 - 1 \Leftrightarrow 2u_1 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0$ Als $u_1 = 0$ dan :
$0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} \Rightarrow u_0 = 1 \Rightarrow$ Voor $a = u_0 = 1$ krijgen we de rij : 1 ; 0 ; -1
Conclusie: voor a = -1 of 0 of 1 krijgen we een rij die uit maximaal 3 termen bestaat.

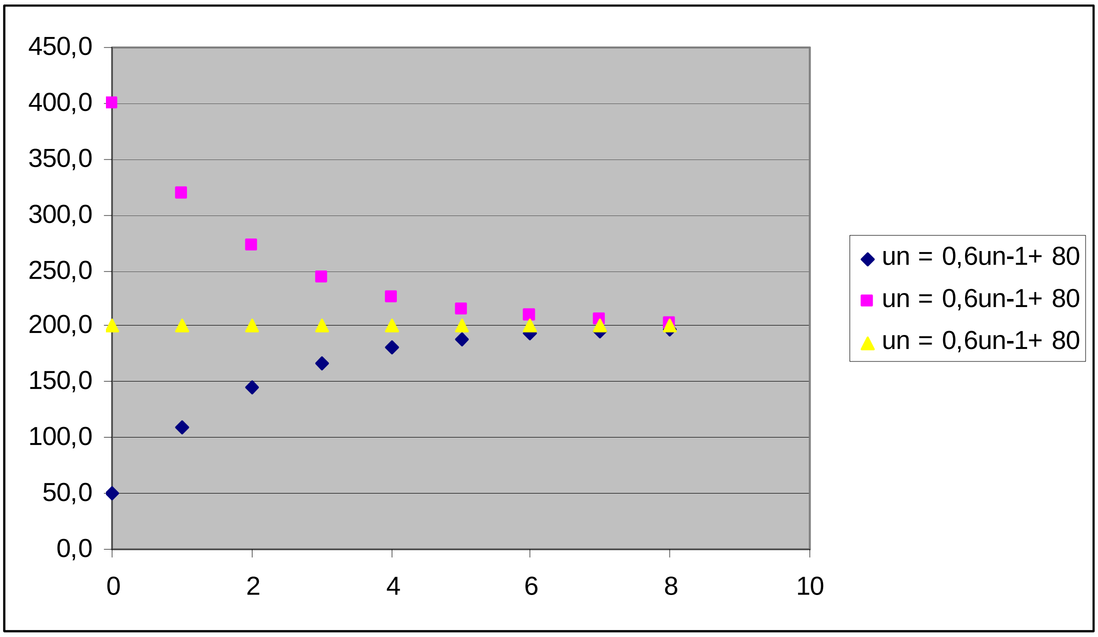
c. Stel u_0 = a dan $u_1 = \dfrac{a-1}{a+1} \Rightarrow u_2 = \dfrac{\frac{a-1}{a+1} - 1}{\frac{a-1}{a+1} + 1} \cdot \dfrac{a+1}{a+1} = \dfrac{a - 1 - (a+1)}{a - 1 + (a+1)} = \dfrac{-2}{2a} = \dfrac{-1}{a}$

$$u_3 = \frac{\frac{-1}{a} - 1}{\frac{-1}{a} + 1} \cdot \frac{a}{a} = \frac{-1-a}{-1+a} = \frac{1+a}{1-a} \Rightarrow u_4 = \frac{\frac{1+a}{1-a} - 1}{\frac{1+a}{1-a} + 1} \cdot \frac{1-a}{1-a} = \frac{1 + a - 1.(1-a)}{1 + a + 1.(1-a)} = \frac{2a}{2} = a \Rightarrow$$

Voor elke a ongelijk aan -1 , 0 , 1 is deze rij periodiek met periode 4.

13a,b,c. $u_n = 0,6u_{n-1} + 80$

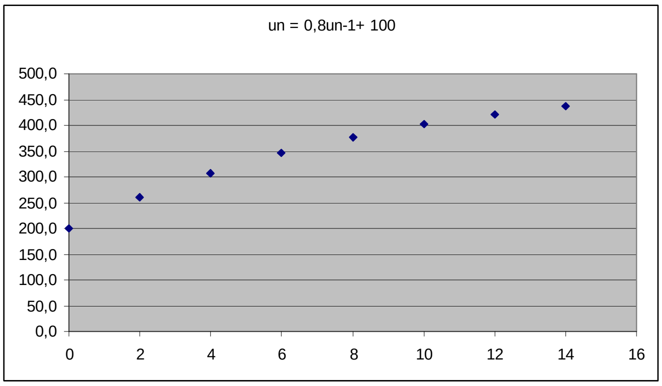
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$u_n = 0,6u_{n-1} + 80$	50,0	110,0	146,0	167,6	180,6	188,3	193,0	195,8	197,5
$u_n = 0,6u_{n-1} + 80$	400,0	320,0	272,0	243,2	225,9	215,6	209,3	205,6	203,4
$u_n = 0,6u_{n-1} + 80$	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0



14.

a.

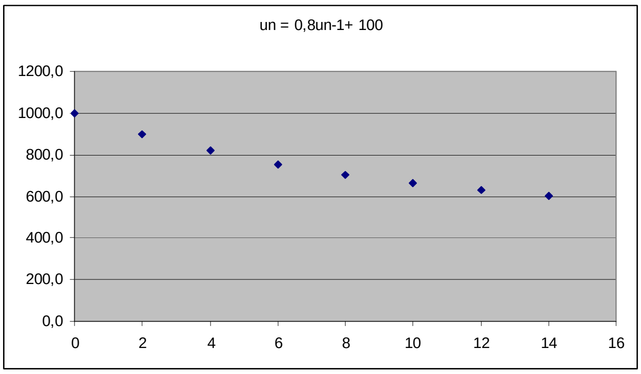
n	0	2	4	6	8	10	12	14
$u_n = 0{,}8u_{n-1} + 100$	200,0	260,0	308,0	346,4	377,1	401,7	421,4	437,1



Deze rij is monotoon stijgend en ook begrensd.

b.

n	0	2	4	6	8	10	12	14
$u_n = 0{,}8u_{n-1} + 100$	1000,0	900,0	820,0	756,0	704,8	663,8	631,1	604,9



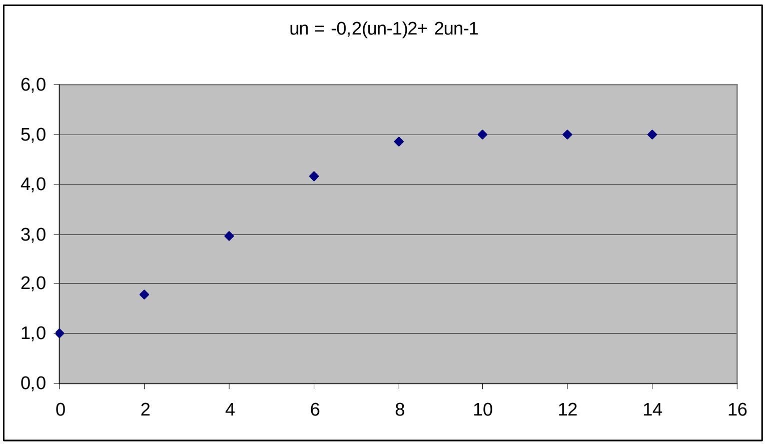
De rij is nu monotoon dalend en begrensd.

c. De grenswaarde is hier 500.

d. Als a = 500 dan krijg je een constante rij.

15a.

n	0	2	4	6	8	10	12	14
$u_n = -0{,}2(u_{n-1})^2 + 2u_{n-1}$	1,0	1,8	3,0	4,2	4,9	5,0	5,0	5,0

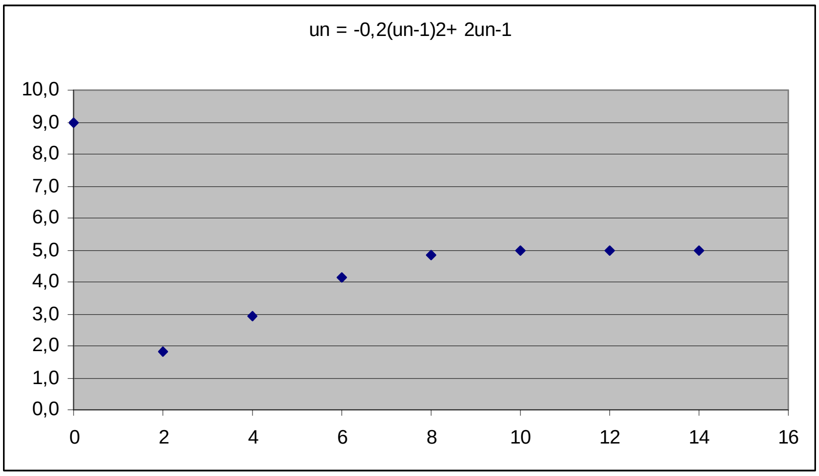


De rij is stijgend en begrensd.

b. de grenswaarde is 5.

c.

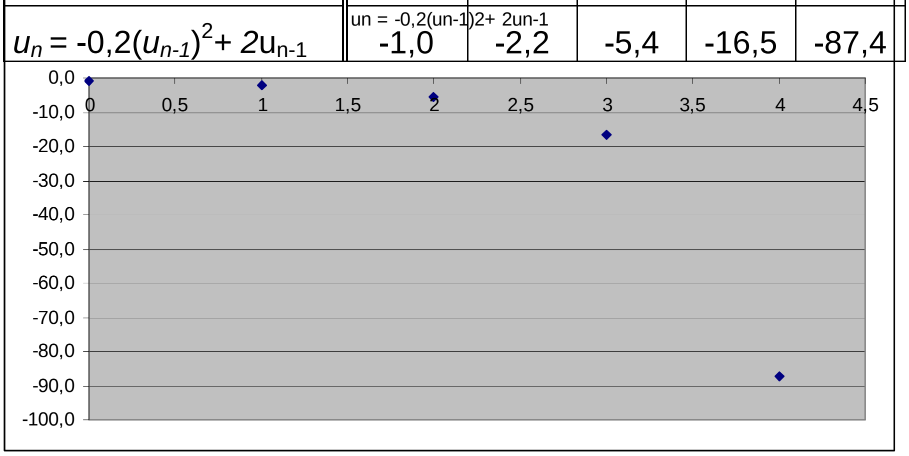
n	0	2	4	6	8	10	12	14
$u_n = -0{,}2(u_{n-1})^2 + 2u_{n-1}$	9,0	1,8	3,0	4,2	4,9	5,0	5,0	5,0



Bij $u_0 = 9$ krijgen we dezelfde grenswaarde 5.

Nu $u_0 = -1$

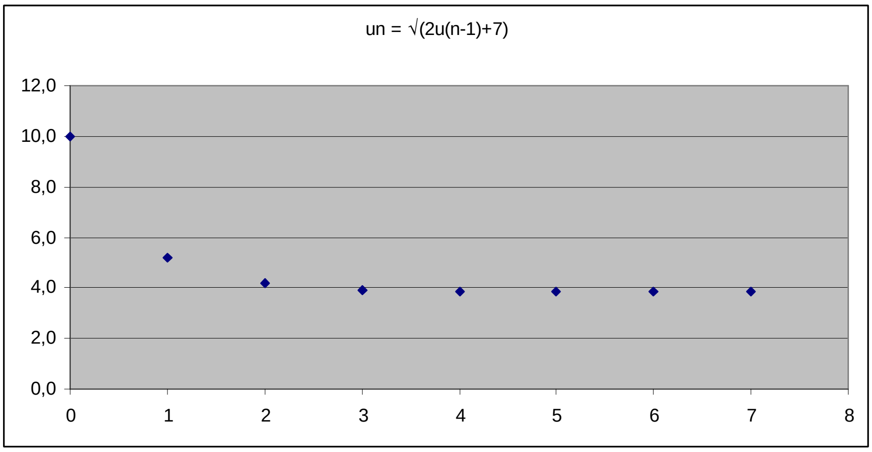
n	0	1	2	3	4
$u_n = -0{,}2(u_{n-1})^2 + 2u_{n-1}$	-1,0	-2,2	-5,4	-16,5	-87,4



Als $u_0 = -1$ dan is de rij monotoon dalend en niet begrensd.

16a.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$u_n = \sqrt{(2u_{(n-1)}+7)}$	10,0	5,2	4,2	3,9	3,9	3,8	3,8	3,8

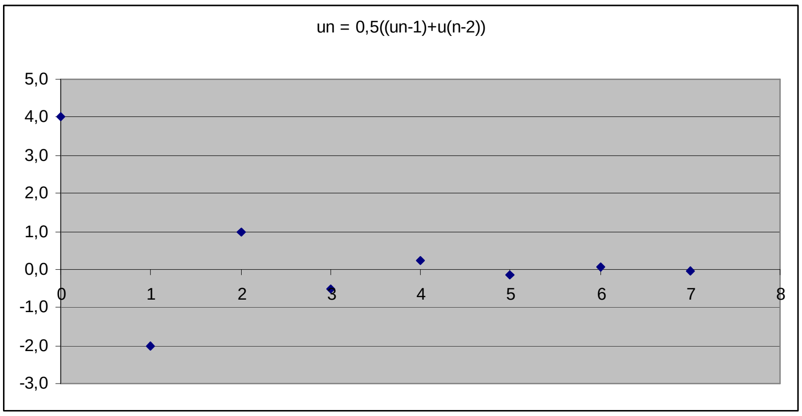


Deze rij is monotoon dalend en begrensd.

c. De grenswaarde is ongeveer 3,828

17a.

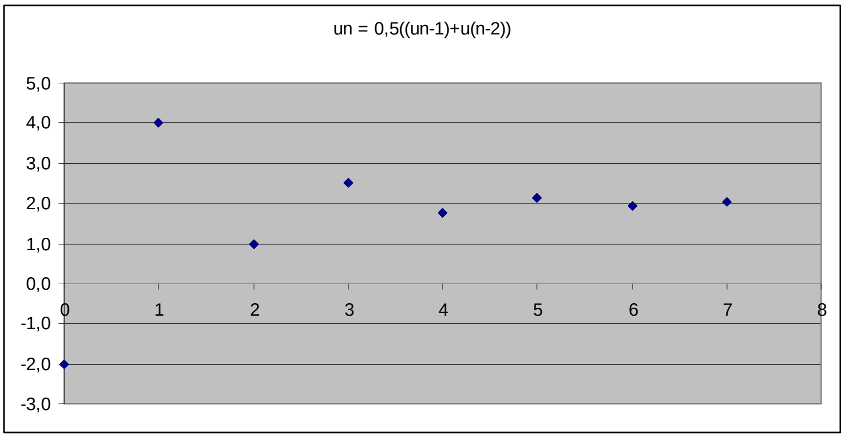
n	0	1	2	3	4	5	6	7
$u_n = 0,5(u_{n-1}+u_{n-2})$	4,0	-2,0	1,0	-0,5	0,3	-0,1	0,1	0,0



Deze rij is alternerend en begrensd met grenswaarde 0.

b.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$u_n = 0{,}5((u_{n-1})+u(_{n-2}))$	-2,0	4,0	1,0	2,5	1,8	2,1	1,9	2,0



Ook deze rij is alternerend en begrensd met grenswaarde 2.

18. Gegeven : $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 80$ met $u_0 = 50$

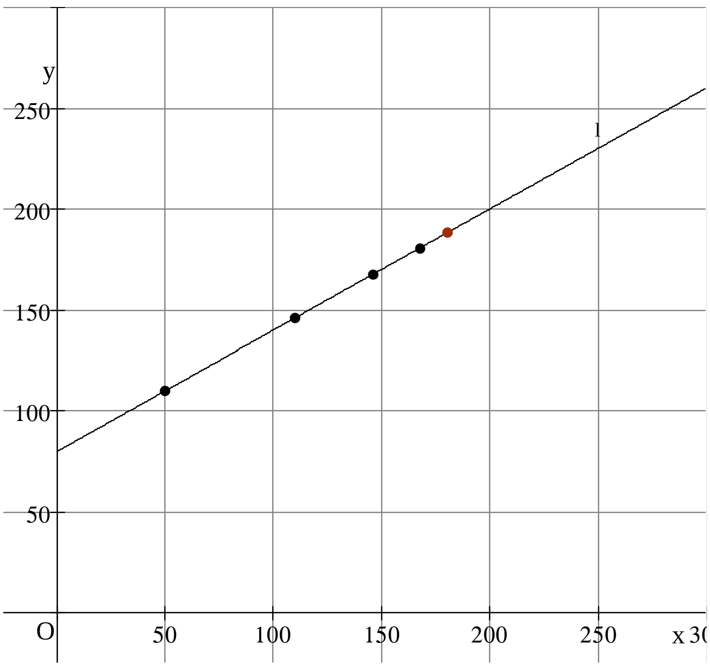
a. $u_0 = 50$ dan $u_1 = 0{,}6 \,.\, 50 + 80 = 110$
$u_2 = 0{,}6 \,.\, 110 + 80 = 146$

b. $u_3 = 0{,}6 \,.\, 146 + 80 = 167{,}6$

c.

$u_0 = 50$	$u_1 = 110$	$u_2 = 146$	$u_3 = 167{,}6$	$u_4 = 180{,}6$
$u_1 = 110$	$u_2 = 146$	$u_3 = 167{,}6$	$u_1 = 180{,}6$	$u_5 = 188{,}3$

d. Uit de 3^e^ kolom volgt het punt (146 ; 167,6)
Uit de 4^e^ kolom volgt het punt (167,6 ; 180,6)



e. Ga uit van de punten (50 , 110) en (110 , 146) $\Rightarrow$ Stel de vergelijking van *l* is : y = *ax* + *b* $\Rightarrow$ r.c = *a* = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{146-110}{110-50} = \frac{36}{60} = 0{,}6 \;\Rightarrow y = 0{,}6\,x + b$ door (50 , 110) $\Rightarrow$ $110 = 0{,}6 \,.\, 50 + b \Leftrightarrow$ $b = 80 \;\Rightarrow$ De vergelijking van *l* is dus : $y = 0{,}6x + 80$

f. De vergelijking van *l* lijkt veel op de formule van $u_{n+1} = 0,6u_n + 80$ met $u_0 = 50$

g. Nu nemen we de formule $u_{n+1} = 0,6u_n + 80$ met $u_0 = 20$ $\Rightarrow$
Neem $u_0 = 20$ dan $u_1 = 0,6 . 20 + 80 = 92$ $\Rightarrow$ punt (20 , 92)
Neem $u_1 = 92$ dan $u_2 = 0,6 . 92 + 80 = 135,2$ $\Rightarrow$ het punt (92 ; 135,2)

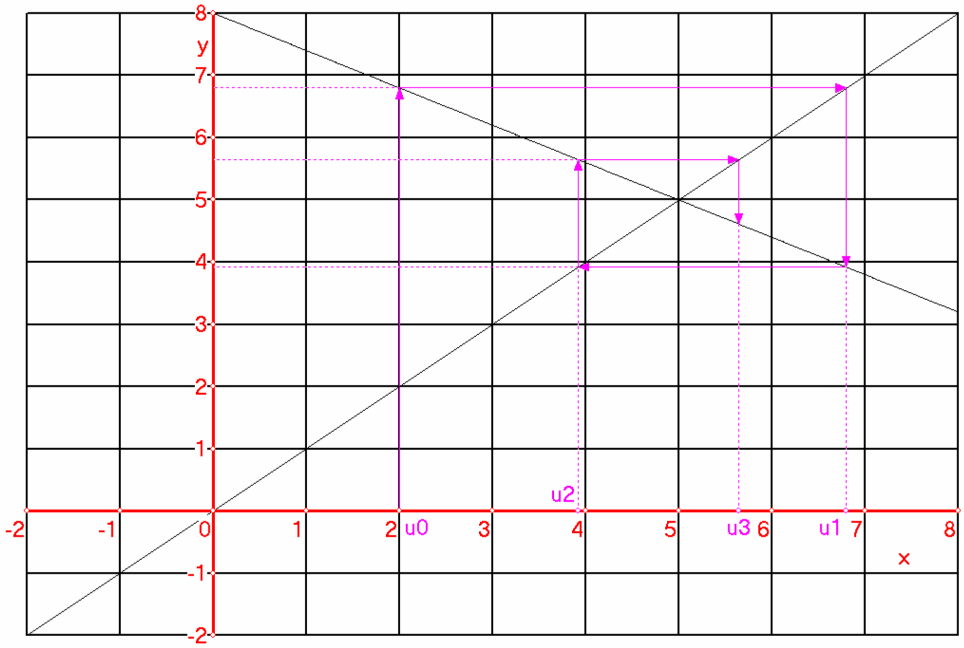
Deze twee punten nu invullen in de vergelijking van lijn *l* $\Rightarrow$ 92 = 0,6 . 20 + 80 klopt
en 135,2 = 0,6 . 92 + 80 en dat klopt ook.

Neem $u_0 = 400$ dan $u_1 = 0,6 . 400 + 80 = 320$ $\Rightarrow$ punt (400 , 320)
Neem $u_1 = 320$ dan $u_2 = 0,6 . 320 + 80 = 272$ $\Rightarrow$ het punt (320 , 272)

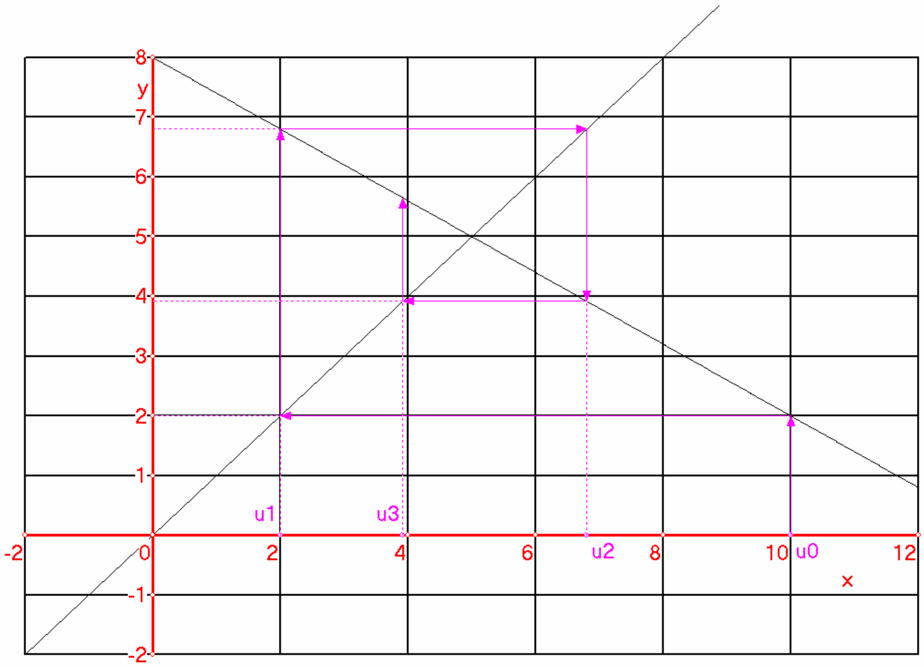
Deze twee punten nu invullen in de vergelijking van lijn *l* $\Rightarrow$ 320 = 0,6 . 400 + 80 klopt
en 272 = 0,6 . 320 + 80 en dat klopt ook. Dus liggen ook de punten bij $u_0 = 400$ op *l*.

19. $u_n = -0,6u_{n-1} + 8$

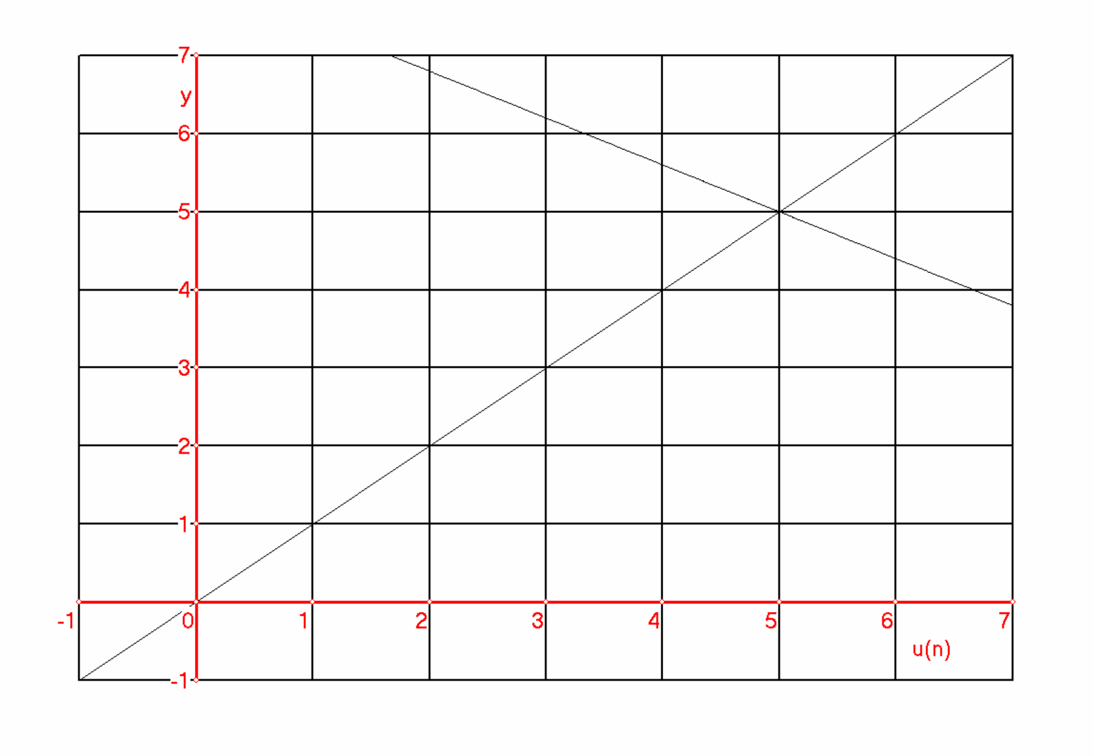
a. $u_0 = 2$



b. $u_0 = 10$



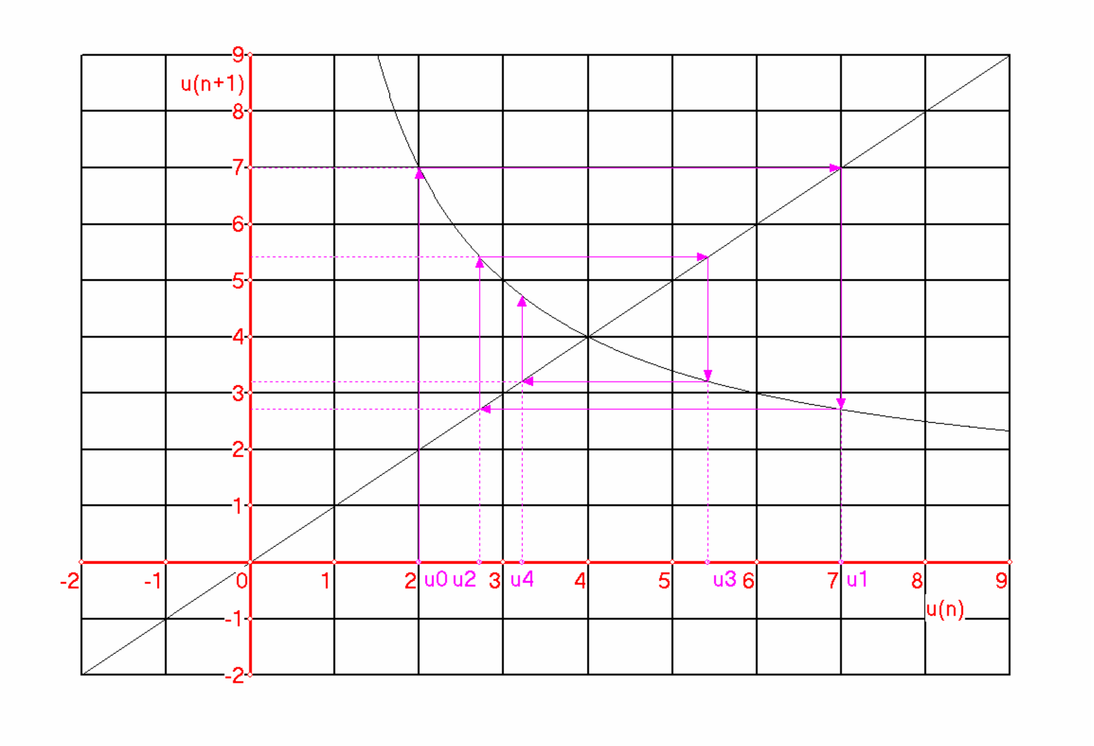
c. $u_0 = 5$



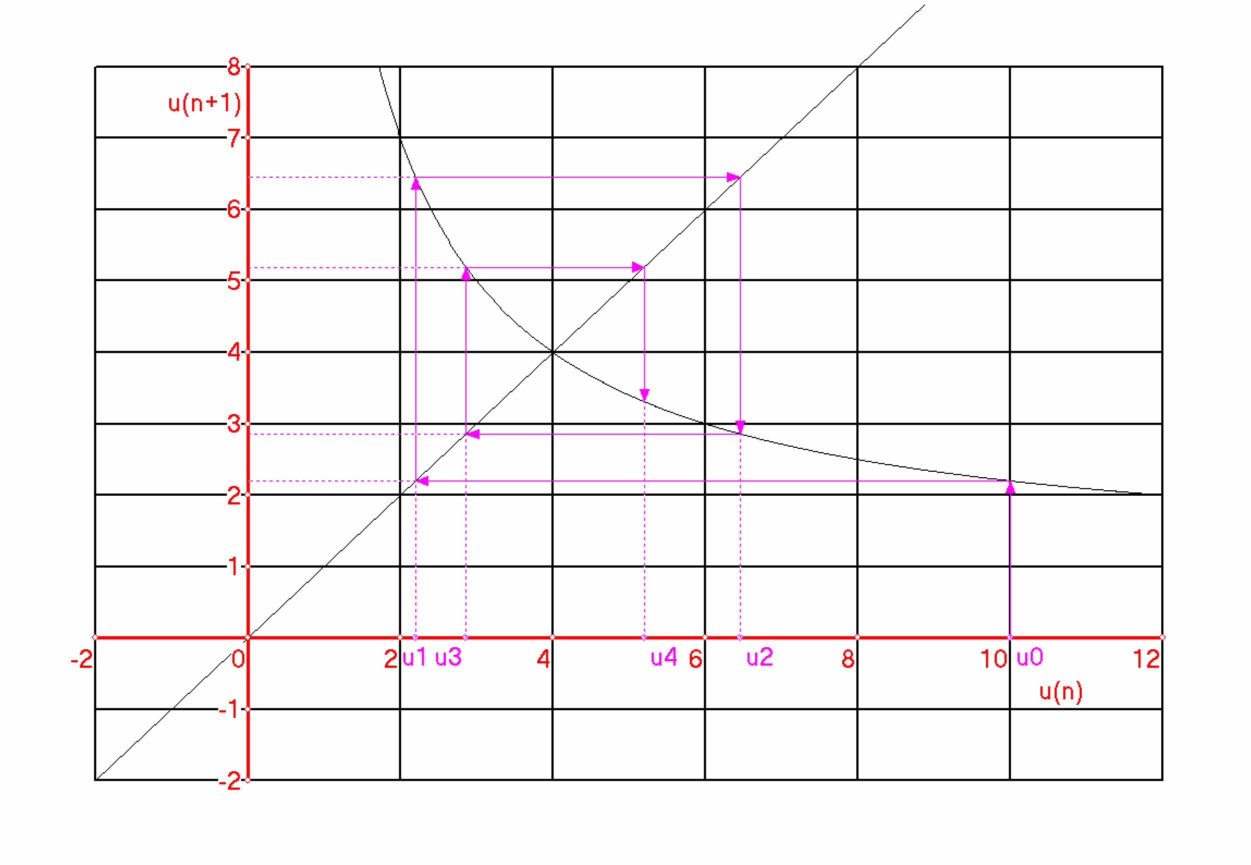
De webgrafiek bestaat nu alleen uit het punt (5,5) $\Rightarrow$ de rij is dus constant.

20. $u_n = 1 + \dfrac{12}{u_{n-1}}$

a. $u_0 = 2$



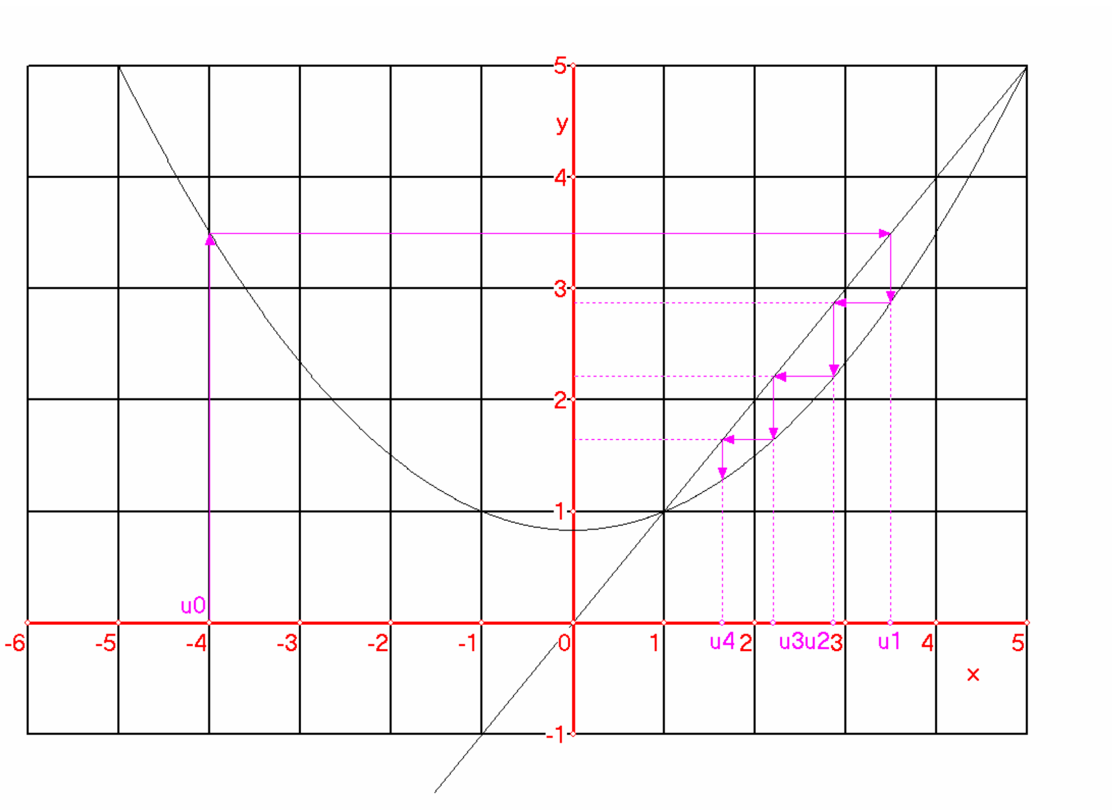
b. $u_0 = 10$



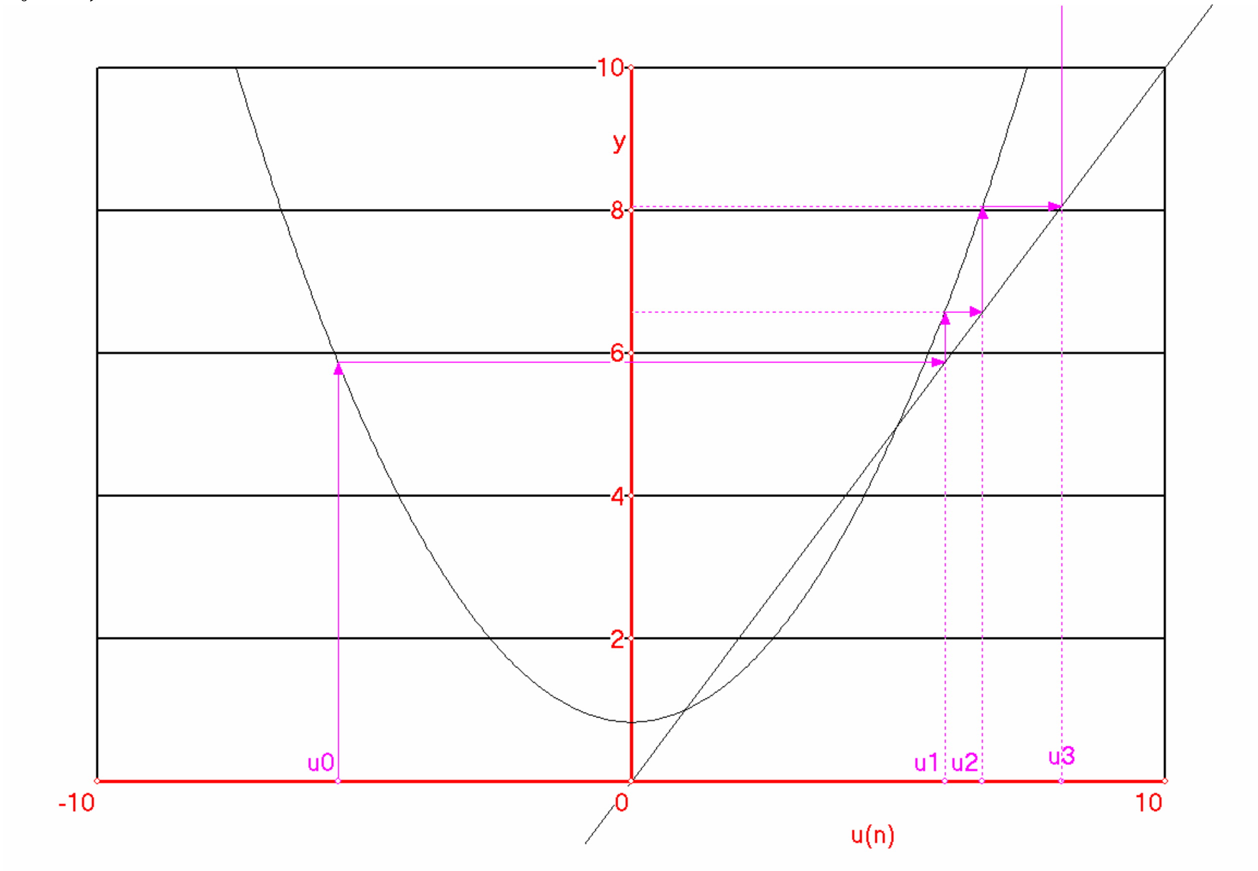
c. Als $u_0 = 4$ dan hebben we een constante rij.

21. $u_{n+1} = f(u_n)$

a. $u_0 = -4$



b. u_0 = -5,5

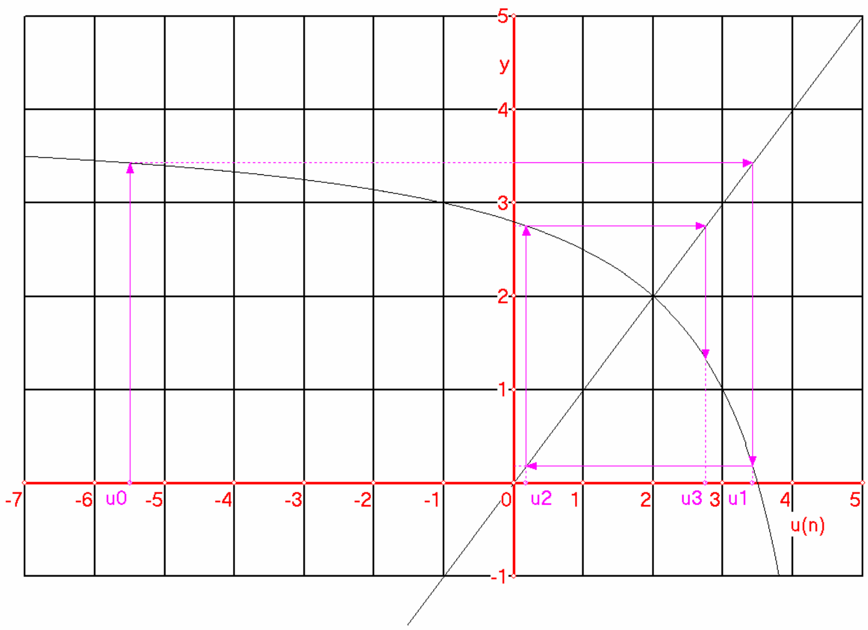


c. De 1e bewering klopt want voor alle waarden van u_0 tussen -5 en 5 gaat de webgrafiek naar het punt (1,1)
De 2e bewering klopt niet. Alleen bij u_0 = 5 of u_0 = -5 geeft de webgrafiek een zeer snelle benadering naar (5,5)

22. $u_n = \dfrac{4u_{n-1} - 14}{u_{n-1} - 5}$

a. u_0 = -4

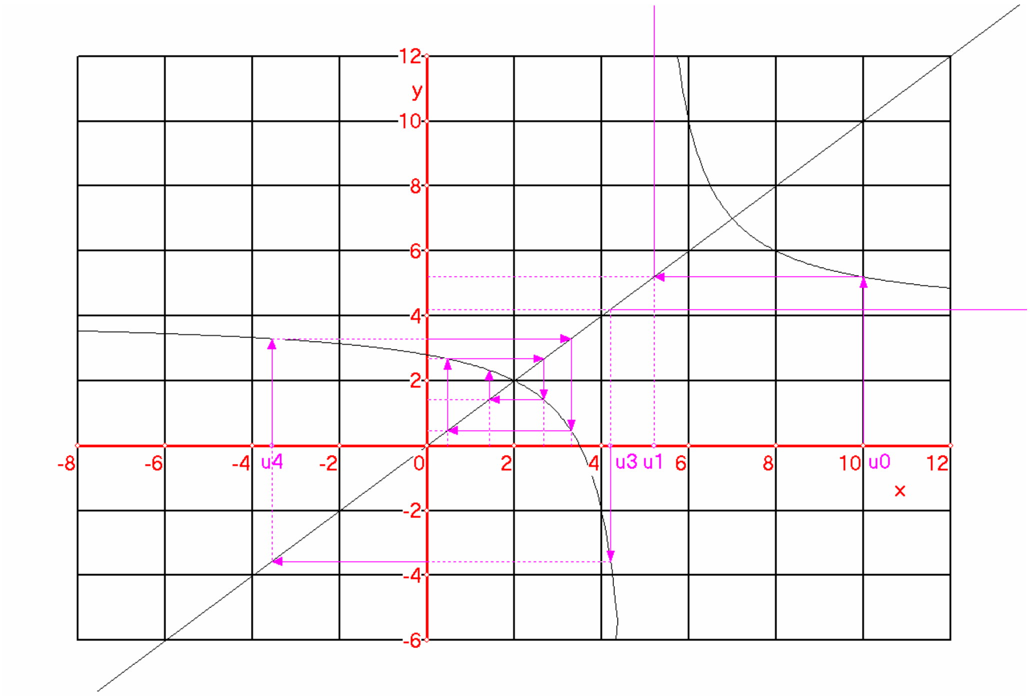
b.



$$\frac{4x-14}{x-5} = x$$
$$x^2 - 5x = 4x - 14$$
$$x^2 - 9x + 14 = 0$$
$$(x-7)(x-2) = 0$$
$$x = 7 \vee x = 2$$

De grenswaarde is nu 2.

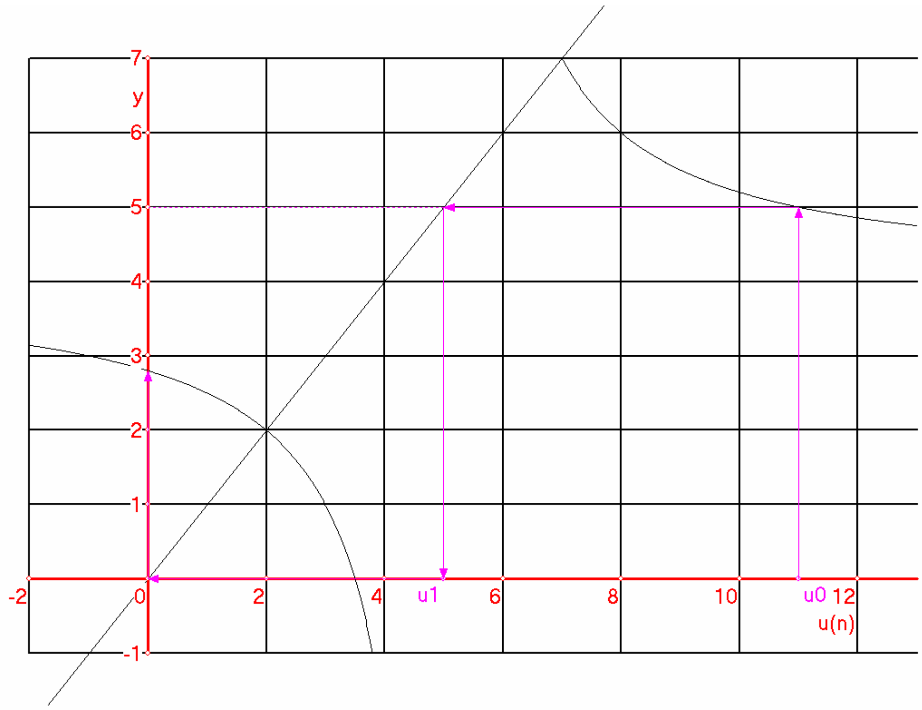
c.



De grenswaarde is toch weer 2.

d. Een constante rij krijgen we als $u_0 = 2 \vee u_0 = 7$ dus de snijpunten van y = x en $y = \dfrac{4x-14}{x-5}$

e.



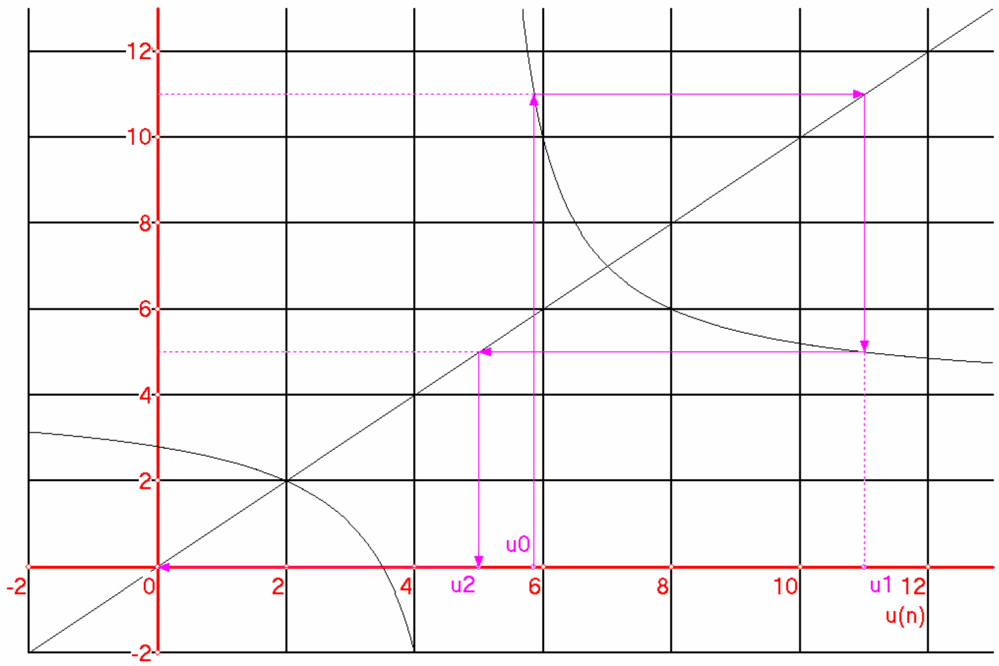
Als $u_0 = 11$ dan $u_1 = 5$ (asymptoot) en dan krijgen we geen volgende punt van de webgrafiek.

f. Nu moeten we u_0 zodanig vinden dat de rij uit slechts 3 termen bestaat dus afbreekt bij u_2

$$\Rightarrow u_2 = 5 \Rightarrow \frac{4u_1 - 14}{u_1 - 5} = 5 \Leftrightarrow 4u_1 - 14 = 5u_1 - 25 \Leftrightarrow u_1 = 11 \Rightarrow$$

$$\frac{4u_0 - 14}{u_0 - 5} = 11 \Leftrightarrow 4u_0 - 14 = 11u_0 - 55 \Leftrightarrow 7u_0 = 41 \Leftrightarrow u_0 = \tfrac{41}{7} \Rightarrow$$

Bij een startwaarde van $u_0 = \tfrac{41}{7}$ dan bestaat de rij uit slechts 3 termen.



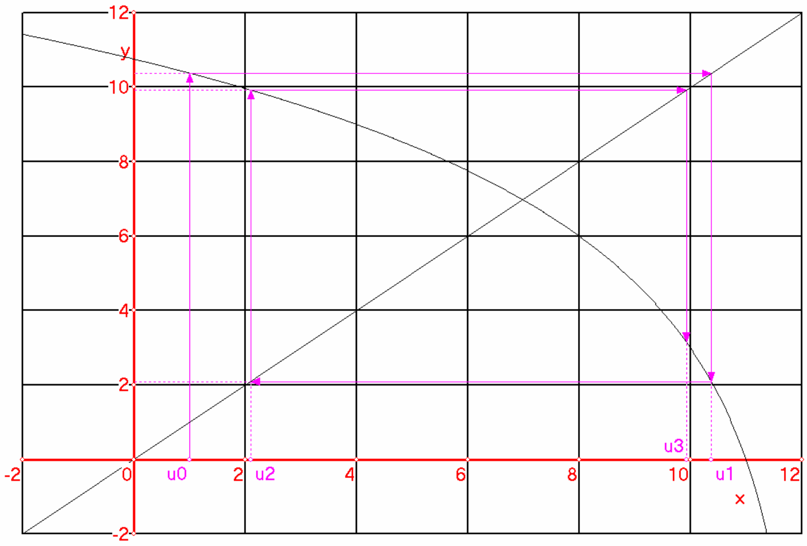
23. $u_n = a.{}^{2}\log(12 - u_{n-1})$ Nu $a = 3$

a. $u_0 = 1$

b. We moeten het snijpunt vinden van

$y = x$ en van
$y = 3.{}^{3}\log(12 - x)$

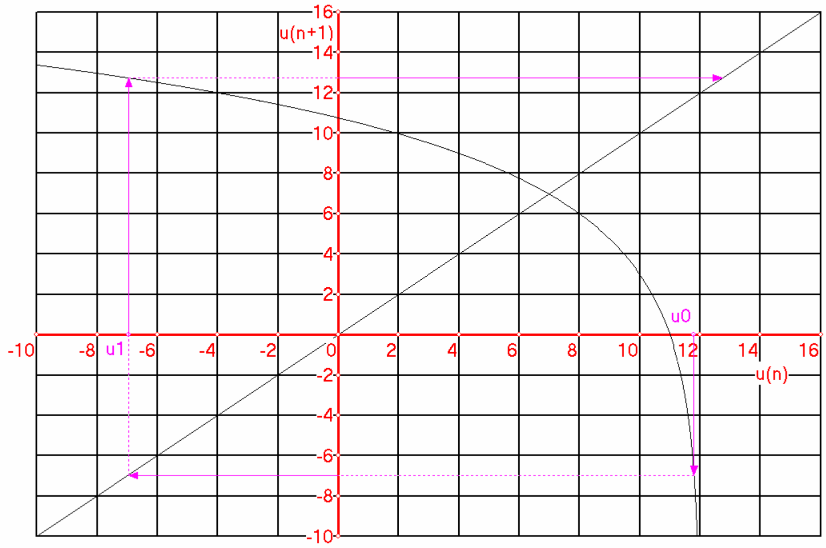
Voer in : $y_1 = 3.{}^{3}\log(12 - x)$
en voer in y_2 = x Nu met intersect vinden we
x ≈ 6,982 $\Rightarrow$ de grenswaarde is dus ongeveer 6,982



c. Twee termen $\Rightarrow u_1$ is dus de laatste term $\Rightarrow u_1 = 12 \Rightarrow$ Los op :

$3.\,{}^2\log(12-u_0)=12 \Leftrightarrow {}^2\log(12-u_0)=4 \Leftrightarrow 12-u_0=16 \Leftrightarrow u_0=-4$

Verder kun je aan de webgrafiek zien dat als $u_1 < -4$ er verder ook geen verdere termen te vinden zijn.



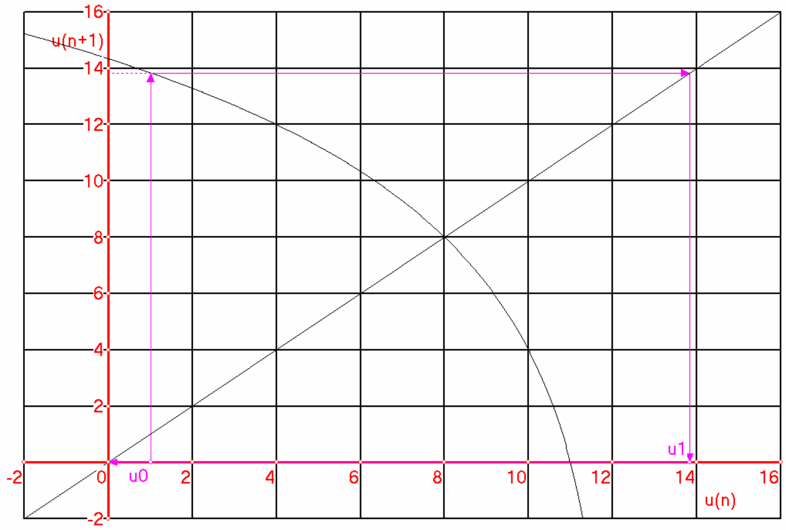
Verder is er ook een grens als $u_1 = -1 \Rightarrow$

$-4=3.\,{}^2\log(12-u_0) \Leftrightarrow {}^2\log(12-u_0)=-\frac{4}{3} \Leftrightarrow 12-u_0=2^{-\frac{4}{3}} \Leftrightarrow u_0=12-2^{-\frac{4}{3}}$

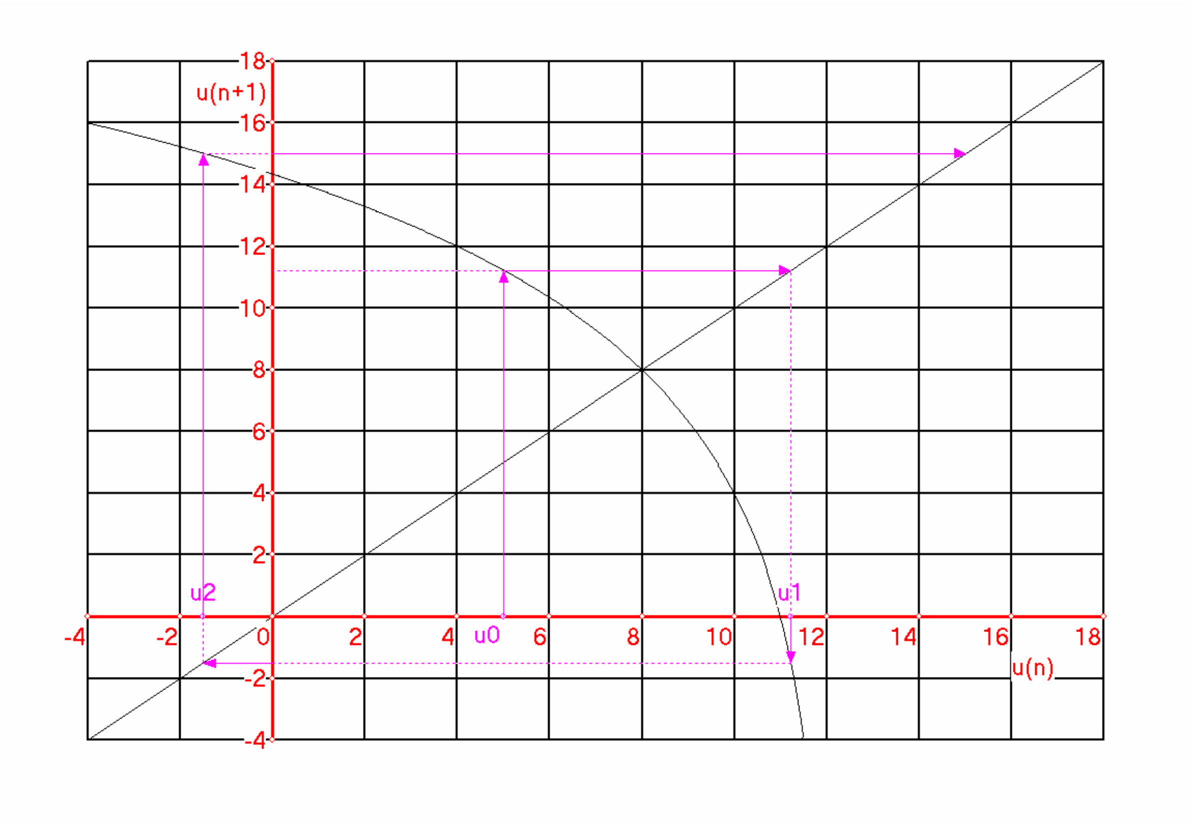
Als nu u_0 tussen $12-2^{-\frac{4}{3}}$ en 12 ligt dan hebben we nog wel een u_1, maar kunnen we geen u_2 krijgen. (rechts van de verticale asymptoot)

d. Bij $u_0 = 1$ zou u_1 rechts van de verticale asymptoot moeten komen en dat kan niet .

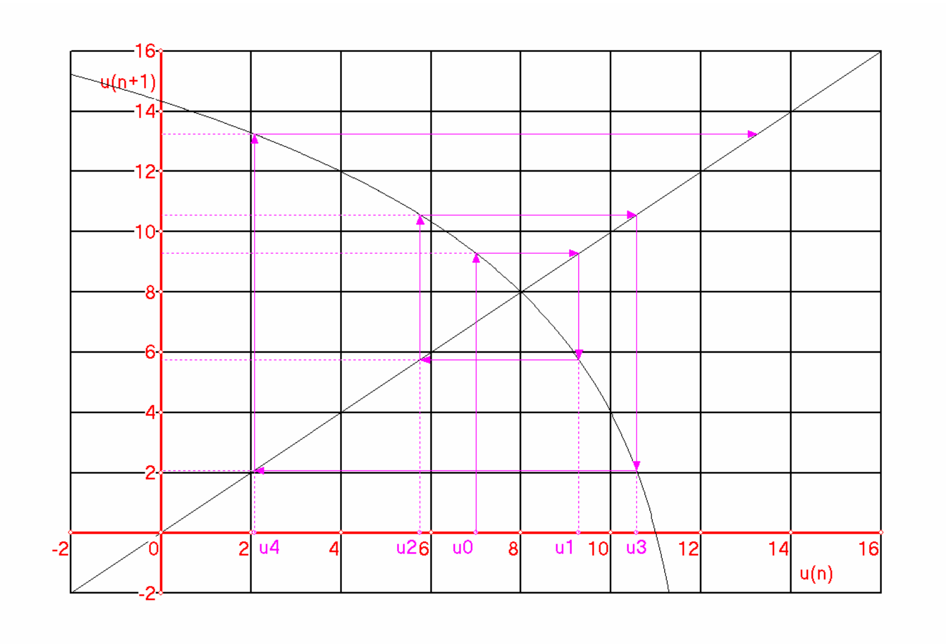
Geen tweede term u_1 . Zie de figuur



Als $u_0 = 5$ dan hebben we nog de termen u_1 en u_2 maar de term u_3 bestaat niet , want dan komen we weer rechts van de verticale asymptoot.



e. Bij $u_0 = 7$ kunnen we nog twee keer meer "draaien" voordat de webgrafiek zich rechts van de verticale asymptoot bevindt. $\Rightarrow$ twee termen meer dan bij $u_0 = 5$. Zie ook de figuur.



24. Gegeven de rij : $u_n = 3n + 10$

a. $S_n = 0,5.\text{aantal termen}.(u_0 + u_n) = 0,5(n+1)(10+3n+10) = 0,5.(n+1)(3n+20)$

b. $S_n = 0,5(n+1)(3n+20) = 0,5(3n^2+20n+3n+20) = 1,5n^2+11,5n+10 \Rightarrow$
a = 1,5 ; b = 11,5 en c = 10

25.

a. $u_n = 100 - 3n$ is een rr $\sum_{k=0}^{n}(100-3k) = S_n = 0,5.(n+1)(100+100-3n) = 0,5(n+1)(200-3n)$

$= 0,5(-3n^2+197n+200) = -1,5n^2+98,5n+100$

b. $u_n = 6n + 15$ is een rr.

$\sum_{k=10}^{n}(6k+15) = 0,5(n+1-10).((60+15)+(6n+15)) = 0,5(n-9)(90+6n) = (n-9)(45+3n) =$

$3n^2 - 27n + 45n - 405 = 3n^2 + 18n - 405$

c. $u_n = 50 \,.\, 1,05^n$ is een mr.

$\sum_{k=0}^{n}\left(50.1,05^k\right) = S_n = \dfrac{50(1-1,05^{n+1})}{1-1,05} = -1000.(1-1,05^{n+1}) = 1000.1,05^{n+1} - 1000$

d. $u_n = 800 \,.\, 0,5^n$ is een mr.

$\sum_{k=5}^{n}\left(800.0,5^k\right) = \dfrac{800.0,5^5 - 800.0,5^{n+1}}{1-0,5} = \dfrac{800.0,5^5}{0,5} - \dfrac{800.0,5^{n+1}}{0,5} = 50 - 1600.0,5^{n+1}$

26.

a. $u_n = 2n + 18$ is een rr.

$$\sum_{k=n}^{2n}(2k+18)=0,5((2n+1)-(n))((2n+18)+(2.2n+18))=0,5.(n+1)(6n+36)=(n+1)(3n+18)$$
$= 3n^2 + 21n + 18$

b. $u_n = 1000 - n$ is een rr.

$$\sum_{k=n}^{n^2}(1000-k)=0,5(n^2+1-n)((1000-n)+(1000-n^2))=0,5(n^2-n+1)(2000-n-n^2)=$$

$$=0,5(2000n^2-n^3-n^4-2000n+n^2+n^3+2000-n-n^2=-0,5n^4+1000n^2-1000,5n+1000$$

c. $u_n = 600 \,.\, 1,2^n$ is een mr.

$$\sum_{k=n}^{n+4}\left(600.1,2^k\right)=\frac{600.1,2^n-600.1,2^{n+5}}{1-1,2}=\frac{600.1,2^n-600.1,2^{n+5}}{-0,2}=-3000.1,2^n+3000.1,2^{n+5}=$$

$$3000.1,2^n.\left(-1+1,2^5\right)=3000.1,2^n.1,48832=4464,96.1,2^n$$

d. $u_n = 1000 \,.\, 0,8^n$ is een mr.

$$\sum_{k=n-2}^{n+2}\left(1000.0,8^k\right)=\frac{1000.0,8^{n-2}-1000.0,8^{n+3}}{1-0,8}=5000.0,8^{n-2}-5000.0,8^{n+3}=$$

$$5000.0,8^{n-2}(1-0,8^5)=3361,6.0,8^{n-2}$$

27.

a. $u_n = 4n + 10$ is een rr. Er staan $n + 1$ termen $\Rightarrow$
$$10+14+18+22+...+(4n+10)=0,5.(n+1)(10+4n+10)=(n+1)(10+2n)=2n^2+12n+10$$

b. $u_n = 6n + 2$ is een rr. $20 = u_3 \Rightarrow$ er zijn $n + 1 - 3 = n - 2$ termen $\Rightarrow$
$$20+26+32+38+....+(6n+2)=0,5(n-2)(20+6n+2)=(n-2)(11+3n)=3n^2+5n-22$$

c. $u_n = 2^n$ is een mr. $u_2 = 4$ en $r = 2$

$$4+8+16+....+2^n = \frac{4-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1}-4$$

d. $u_n = 5 \,.\, 2^n$ is een mr. met $r = 2$ en $80 = u_4$

$$80 + 160 + 320 + 640 + \ldots + 5.2^n = \frac{80-5.2^{n+1}}{1-2} = 5.2^{n+1}-80$$

28. Gegeven de rij : u_n met $n = 0 , 1 , 2 ,$ door: 1 , 6 , 14 , 25 , 39 , 56 , 76 , ….
$v_n = u_{n+1} - u_n$

a. $v_0 = u_1 - u_0 = 6 - 1 = 5$; $v_1 = u_2 - u_1 = 14 - 6 = 8$; $v_2 = u_3 - u_2 = 25 - 14 = 11$
$v_3 = u_4 - u_3 = 39 - 25 = 14$; $v_5 = u_6 - u_5 = 56 - 39 = 17$; $v_6 = u_7 - u_6 = 76 - 56 = 20$

We krijgen dus de verschilrij : 5 , 8 , 11 , 14 , 17 , 20 , ….. Dit is een rr met $v = 3$ en beginterm 5 $\Rightarrow v_n = 5 + 3n$

b. Somrij T_n $\Rightarrow T_0 = 5$; $T_1 = 13$; $T_2 = 24$; $T_3 = 38$; $T_4 = 55$ en $T_5 = 75$ We krijgen dus :
T_n : 5 , 13 , 24 , 38 , 55 , 75 , …

c. Al deze termen zijn 1 minder dan de termen van u_{n+1}. Verder geldt dat $u_0 = 1$ $\Rightarrow$
$T_n = u_{n+1} - 1 = u_{n+1} - u_0$.

d. $T_n = 0{,}5(n+1)(5+3n+5) = 0{,}5(n+1)(10+3n)$ Er volgt dus ook uit onderdeel c :
$u_{n+1} = T_n + u_0 = 0{,}5(n + 1)(10 + 3n) +1$ $\Rightarrow$
$u_n = 0{,}5((n-1)+1)(3(n-1)+10)+1 = 0{,}5n(3n+7)+1 = 1{,}5n^2+3{,}5n+1$

29. Gegeven u_n : 5 , 10 , 16 , 23 , 31 , 40 , 50 , … met $n = 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots$

a. v_n is : 5 , 6 , 7 , 8 , … dit is een rr $\Rightarrow u_n$ is dus kwadratisch.

b. Voor v_n geldt : $v = 1$ en $v_0 = 5$ $\Rightarrow v_n = 5 + n \Rightarrow T_n = 0{,}5(n + 1)(5 + 5 + n) = 0{,}5(n + 1)(10 + n)$
Er geldt volgens een formule : $T_n = u_{n+1} - u_0 \Rightarrow u_{n+1} = T_n + u_0 = 0{,}5(n+1)(n+10)+5 \Rightarrow$
$u_n = 0{,}5n(n+9)+5 = 0{,}5n^2+4{,}5n+5$

30. $u_0 = 10$ en $v_n = u_{n+1} - u_n = 2n + 1$

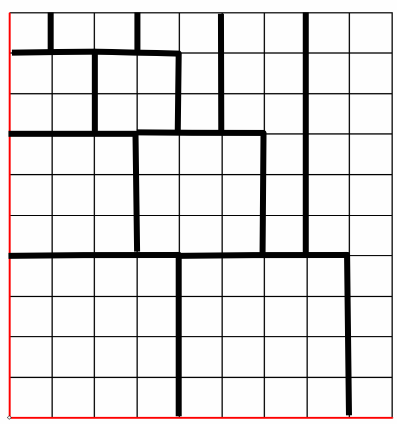
v_n is rr $\Rightarrow$ $T_n = 0,5(n+1)(1+2n+1) = 0,5(n+1)(2n+2)$ Volgens een formule geldt :
$T_n = u_{n+1} - u_0$ $\Rightarrow$ $u_{n+1} = T_n + u_0 = 0,5(n+1)(2n+2)+10 = 0,5(n+1)^2 + 10$ $\Rightarrow$
$u_n = n^2 + 10$

31. Gegeven de rij u_n : 6 , 7 , 9 , 13 , 21 , 37 , … met n = 0 , 1 , 2 , …

a. Voor de verschilrij v_n geldt: 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , … Dit is een mr met $r = 2$ en $v_0 = 1 \Rightarrow$
$v_n = 2^n$ met n = 0, 1 , 2,…

b. De somformule van de verschilrij wordt: $T_n = \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$
Volgens een formule geldt: $T_n = u_{n+1} - u_0$ $\Rightarrow$ $u_{n+1} = T_n + u_0 = 2^{n+1} - 1 + 6 \Rightarrow u_n = 2^n + 5$

32.



a. $3.(1^{2\,+}\,2^2 + 3^2 + 4^2) =$
(1 + 2 + 3 + 4)(1 + 2 + 2 + 2 + 2) =
(1 + 2 + 3 + 4)(1 + 4 . 2)

b. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 =$
$\frac{1}{3}$(1 + 2 + 3 + 4 + 5)(1 + 5 . 2)

c. $S_n = \frac{1}{6}n.(n+1)(2n+1)$?
Als n = 1 $\Rightarrow$ $\frac{1}{6}$.1 . 2 . 3 = 1 en $S_1 = 1$ klopt
Als n = 2 $\Rightarrow$ $\frac{1}{6}$. 2 . 3 . 5 = 5 en $S_2 = 1^2 + 2^2 = 5$ klopt

Als n = 3 $\Rightarrow$ $\frac{1}{6}$. 3 . 4 . 7 = 14 en $S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 5 + 9 = 14$ klopt ook.

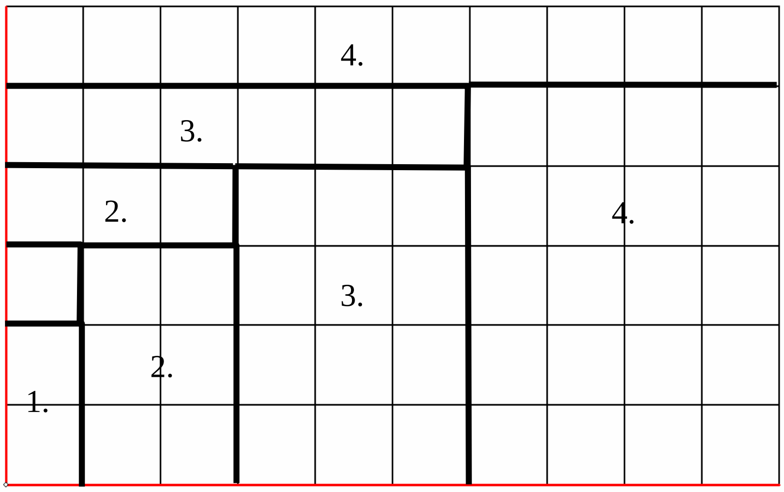
d. $S_n - S_{n-1} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{6}(n-1).n.(2.(n-1)+1) =$
$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) = \frac{1}{6}n.((n+1)(2n+1)-(n-1)(2n-1)) =$
$\frac{1}{6}n.(2n^2+3n+1-(2n^2-3n+1)) = \frac{1}{6}n(2n^2+3n+1-2n^2+3n-1) = \frac{1}{6}n.6n = n^2$

e. $S_1 = 1$ (zie c) en $u_1 = 1^2 = 1$ Uit onderdeel d volgt dat $S_n - S_{n-1} = n^2 = u_n \Rightarrow$
$S_n = S_{n-1} + u_n \Rightarrow S_n = \frac{1}{6}n.(n+1)(2n+1)$ is de somrij van $u_n = n^2$

33.

a. $1{,}5.S_4 = (1+2+3+4)(5+1)$

= oppervlakte rechthoek



b. $1{,}5.S_n = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)\,.$
$((n + 1) + 1) =$
$0{,}5n(n + 1)(n + 2) \Rightarrow$
$S_n = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}.n.(n+1)(n+2) =$
$= \frac{1}{3}.n.(n+1)(n+2)$

c.

$$S_n - S_{n-1} = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{3}(n-1).n.(n+1) = \frac{1}{3}n.((n+1)(n+2)-(n-1)(n+1))$$

$= \frac{1}{3}n.(n^2+3n+2-(n^2-1)) = \frac{1}{3}n.(n^2+3n+2-n^2+1) = \frac{1}{3}n(3n+3) = n.(n+1) \Rightarrow$ De verschilrij van S_n is dus u_n .

Verder geldt nog dat $S_1 = \frac{1}{3}.1.2.3 = 1.2 = u_1 \Rightarrow$ de formule van S_n geldt voor elke n.

34

a. De rij is : u_n: 1 , 3 , 6 , 10 , 15 ,…. De verschilrij v_n is : 2 , 3 , 4 , 5 … $\Rightarrow$
$v_n = 2 + n$ Dit is een rr met $v = 1$ en $v_0 = 2 \Rightarrow T_n = 0{,}5(n+1)(2+2+n) = 0{,}5(n+1)(4+n)$
Verder geldt : $T_n = u_{n+1} - u_0 \Rightarrow u_{n+1} = T_n + u_0 = 0{,}5(n+1)(4+n) + 1 \Rightarrow u_n = 0{,}5n(n+3) + 1 =$
$0{,}5n^2 + 1{,}5n + 1$ Met $n = 0, 1, 2, \ldots$

Een andere manier is dat je meteen ziet dat de gegeven rij de som is van de rr 1 , 2 , 3 , ….
Hier is $v = 1$ en $u_0 = 1 \Rightarrow$ de formule voor de rr is : $t_n = n + 1 \Rightarrow$
Nu de somrij $u_n = 0{,}5(n+1)(1+n+1) = 0{,}5(n+1)(n+2) = 0{,}5n^2 + 1{,}5n + 1$ klopt. Ook hier met $n = 0, 1, 2, \ldots$

b. Nu n = 1 , 2 , 3 , … $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3$ = I(rood) + I(groen) + I(blauw)

c. $S_1 = 1^3$ = I(rood) = I(figuur a) ; $S_2 = 1^3 + 2^3 = 1 + 8$ = I(rood) + I(groen) = I (figuur b)
$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27$ = I(rood) + I(groen) + I(blauw) = I(figuur c)

d. $S_1 = 1 = 1 . 1$ zie figuur a ; $S_2 = 1 + 8 = 9 = 3^2$ Zie figuur b ; $S_3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 6^2$
Voor de volgende figuur moet dan gelden : $S_4 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100 = 10^2$ = I (4^e^ figuur) = opp. voorkant = $(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 10^2$

e. $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2 = \left(0,5n(1+n)\right)^2 = \frac{1}{4}n^2(1+n)^2$ Hierbij is uitgegaan dat 1 + 2 + 3 + … de som is van een rr met u_n = n Met n = 1 , 2 , 3..

Nu moeten we de formule nog controleren. Dat doen we door gebruik te maken van de formule : $S_n - S_{n-1} = t_n \Rightarrow$

$$\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{4}(n-1)^2.n^2 = \frac{1}{4}n^2\left((n+1)^2 - (n-1)^2\right) = \frac{1}{4}n^2(n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1)$$

$= \frac{1}{4}n^2.4n = n^3$ en dit klopt voor alle n = 1 , 2 , 3 …

35. Gegeven de mr $u_n = 200 . 0,8^n$ met n = 0 , 1 , 2 , …

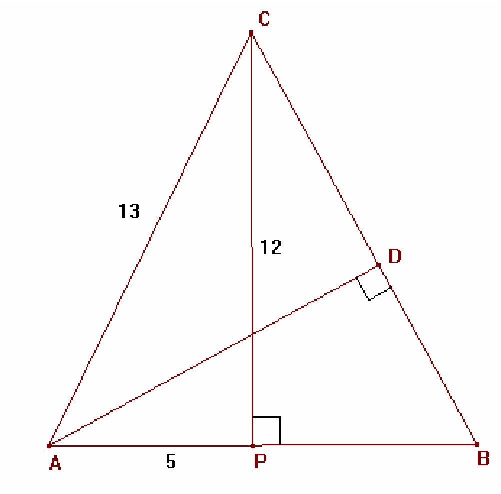
a. $$S_{10} = \frac{u_0 - u_{11}}{1-r} = \frac{200 - 200.0,8^{11}}{1-0,8} \approx 914,101 \; ; \; S_{20} = \frac{u_0 - u_{21}}{1-r} = \frac{200 - 200.0,8^{21}}{1-0,8} \approx 990,777$$

$$S_{10} = \frac{u_0 - u_{51}}{1-r} = \frac{200 - 200.0,8^{51}}{1-0,8} \approx 999,989 \; ; \; S_{100} = \frac{u_0 - u_{101}}{1-r} = \frac{200 - 200.0,8^{101}}{1-0,8} \approx 1000,000$$

b. $$S_n = \frac{u_o - u_{n+1}}{1-r} = \frac{200 - 200.0,8^{n+1}}{0,2} = \frac{200(1 - 0,8^{n+1})}{0,2} = 1000.(1 - 0,8^{n+1})$$

c. Als n heel groot is dan is $0,8^{n+1} \approx 0 \Rightarrow S_n \approx 1000(1 - 0) = 1000$

36a.



Geg. Δ ABC is gelijkbenig met AB = 10
en AC = BC = 13

Te bew. $AD = \frac{120}{13}$ en $CD = \frac{119}{13}$

Bew. Teken CP $\perp$ AB . Verder geldt :
$AC^2 = AP^2 + CP^2 \Rightarrow CP^2 = 169 - 25 =$
144 $\Rightarrow$ CP = 12
Opp. (ABC) = 0,5 . CP . AB = 0,5 . BC . AD $\Rightarrow$
CP . AB = BC . AD $\Rightarrow$ 12 . 10 = 13 . AD $\Rightarrow$
AD = $\frac{120}{13}$ In Δ ADC geldt verder:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \Rightarrow CD^2 = 13^2 - \left(\tfrac{120}{13}\right)^2 \Rightarrow CD = \tfrac{119}{13}$$

Je kunt de exacte uitkomst berekenen met je GR door bovenstaande wortel te laten berekenen en tenslotte m.b.v. de optie frac de exacte uitkomst berekenen. (rekenmachine TI)

b. Zie de figuur in het boek. Δ ADC ~ Δ DEC want $\angle$ C = $\angle$ C en $\angle$ADC = $\angle$ DEC (90º) (hh)

Zo zijn de andere driehoeken gelijkvormig met Δ ADC $\Rightarrow$
Δ ADC ~ Δ DEC ~ Δ EFC ~ Δ FGC enz. (hh) $\Rightarrow$

$$\frac{DE}{DC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow DE = \frac{DC}{AC}.AD = \frac{\frac{119}{13}}{13}.AD = \frac{119}{169}.AD$$ Zo geldt ook Δ DEC ~ Δ EFC $\Rightarrow$

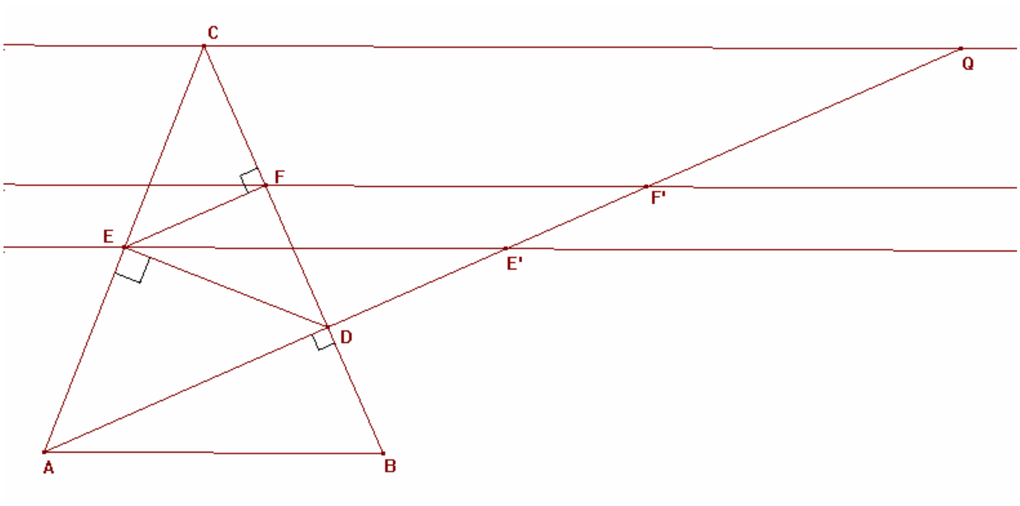
$$\frac{EF}{EC} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow EF = \frac{EC}{DC}.DE = \frac{DC}{AC}.DE = \frac{119}{169}.DE \quad \Rightarrow EF = \left(\frac{119}{169}\right)^2.AD$$ Zo is ook

$$GF = \frac{119}{169}.EF = \left(\frac{119}{169}\right)^3.AD$$ $\Rightarrow$ er ontstaat dus een mr met u_0 = AD = $\frac{120}{13}$ en r = $\frac{119}{169}$

c. Aangezien -1 $\leq r \leq$ 1 geldt dus : De grenswaarde S is dus :

$$S = \frac{u_0}{1-r} = \frac{\frac{120}{13}}{1-\frac{119}{169}} = \frac{\frac{120}{13}}{\frac{50}{169}} = \tfrac{120}{13} \cdot \tfrac{169}{50} = 31,2$$

d.



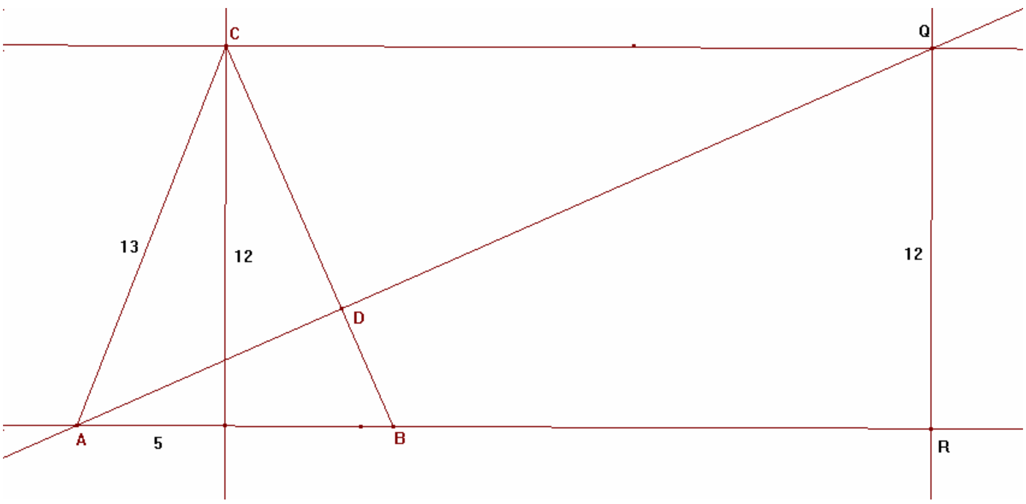
Zie de figuur . CQ // AB. Teken ook nog de lijnen FF'en EE' // AB .

$$\left.\begin{array}{l} \angle DEE' = 90^{\circ} - \angle CEE' = 90^{\circ} - \angle A(f - hoek) \\ \angle E' = \angle BAD(z - hoek) = 90^{\circ} - \angle B \\ \angle A = \angle B(gelijkbenig) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle DEE' = \angle E' \Rightarrow \text{ED = DE'}$$

Aangezien vierhoek EE'F'F een pgm is (door de evenwijdigheid) geldt dus dat EF = E'F' ⇒
AF' = AD + DE'+ EF' = AD + DE +EF

Dit principe zet zich oneindig keren voort ⇒ de totale lengte van de loodlijnen is dus AQ.

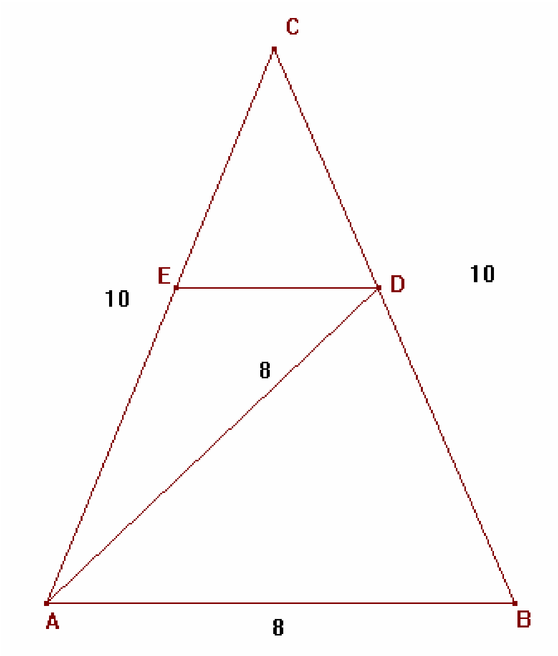
e.



$$\left.\begin{array}{l}\angle A=\angle A\\ \angle D=\angle R(90^\circ)\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta AQR(hh)\Rightarrow \frac{AB}{AQ}=\frac{BD}{QR}\Leftrightarrow \frac{10}{AQ}=\frac{\frac{50}{13}}{12}\Rightarrow \tfrac{50}{13}AQ=120$$

$\Rightarrow AQ=\dfrac{120}{\frac{50}{13}}=31,2$ Dit klopt met de som bij onderdeel c.

37.



Gegeven:

AC = BC = 10 ; ED // AB ; AB = AD = 8

Te ber. BD en ED

Ber. $\left.\begin{array}{l}\angle B=\angle BAC(AC=BC)\\ \angle BDA=\angle B(AB=AD)\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta BDA(hh)\Rightarrow \dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AC}{AB}\Rightarrow \dfrac{8}{BD}=\dfrac{10}{8}\Rightarrow$

10BD = 64 ⇔ BD = 6,4

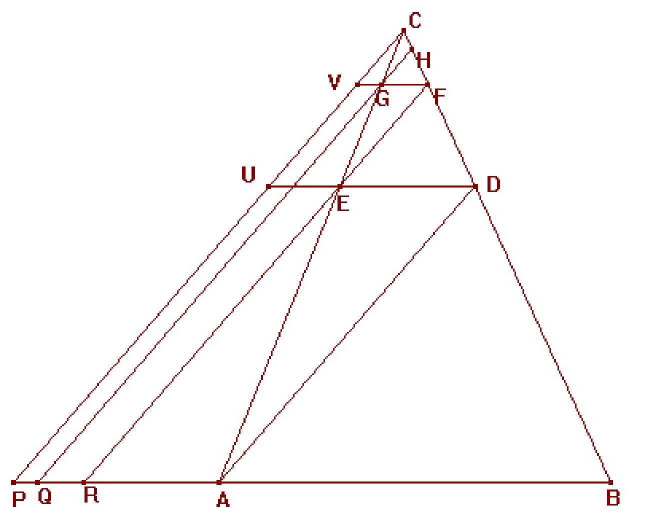
Aangezien ED // AB geldt dat dit een A-figuur is ⇒

$$\frac{CD}{BC}=\frac{ED}{AB}\Rightarrow \frac{10-6,4}{10}=\frac{ED}{8}\Rightarrow 10ED=8.3,6\Leftrightarrow ED=2,88$$

b. Duidelijk dat geldt : Δ ABC ~ Δ EDC ~ Δ GFC etc.(hh) ⇒ er is steeds een vermenigvuldiging van de ene naar de andere driehoek met factor 2,88/8 = 0,36 ⇒
ED = 8 . 0,36 en GF = ED . 0,36 = 8 . $0,36^2$ enz ⇒
We hebben te maken met een mr met u_0 = AB = 8 en r = 0,36
Ook de lijnstukken AD , EF , GH enz. hebben te maken met dezelfde vermenigvuldiging.
Startwaarde is AD = 8 en de factor is nog steeds 0,36 ⇒ De totale som is dus :

AB + AD + ED + EF + GF + GH … = 2. (AB + ED + GF +……) = $2.\dfrac{8}{1-0,36}=25$

c.



Geg. AD // FR // HQ … // CP
en AB // ED // GF //….

AD = AB = 8 en AC = BC = 10

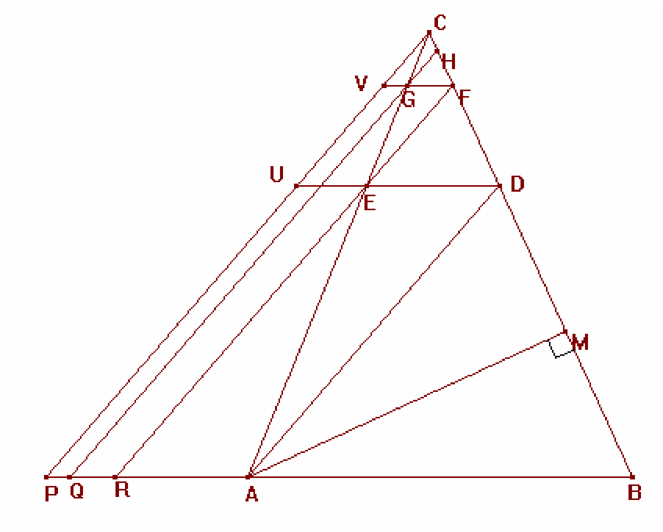
We weten : ED = 2,88 en CD = 3,6

Te berekenen : de grenswaarde van de totale lengte net zoals bij onderdeel b.

Er zijn steeds evenwijdige lijnen dus is er steeds sprake van een pgm. ⇒
AB + AD + ED + EF + GF + GH +…… = (AB+ ED + GF + ….) + (AD + EF + GH + …..)
= (AB + AR + RQ + …) + (PU + UV +……..) = PB + PC

d.

Teken eerst AM ⊥ BC ⇒



$AM^2 + BM^2 = AB^2 \Rightarrow AM^2 = 64 - 3,2^2 \Rightarrow AM = \sqrt{53,76}$ ⇒ O(ΔABD) = 0,5.BD.AM = 0,5.6,4.√53,76 ≈ 23,4628 De driehoeken zijn gelijkvormig . De vermenigvuldigingsfactor is 0,36 ⇒ Bij de oppervlakten is dus de factor $0,36^2$. We hebben dus weer een mr met u_0 = Opp. 1 ≈ 23,4628 en $r = 0,36^2$ ⇒ De totale grenswaarde is de som van de oppervlakten.
Dus hebben we de som van deze mr ⇒ grenswaarde is dus: $\dfrac{23,4628}{1-0,36^2}$ ≈ 26,9563

38.

a. De balken zijn gelijkvormig $\Rightarrow$ er is dus een verm. factor. Ribbe grondvlak is 12 . Dit gaat over in $\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ de verm factor is dus : $\dfrac{6\sqrt{2}}{12}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ alle zijden worden dus met deze factor vermenigvuldigd. Dus ook de hoogten. We krijgen een mr met u_0 = 8,5 en r = $\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$. Er geldt : -1 ≤ r ≤ 1 $\Rightarrow$ de grenswaarde is dus : $\dfrac{8{,}5}{1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}}$ ≈ 29 m

b. Inhoud I_0 = 12 . 12. 8,5 = 1224 De verm. factor voor de inhoud is :
$\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^3=\tfrac{1}{8}.2.\sqrt{2}=\tfrac{1}{4}\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ De grenswaarde voor de inhoud is dus : $I=\dfrac{1224}{1-\tfrac{1}{4}\sqrt{2}}$ ≈ 1893 m^3

39. Gegeven : u_n : 1 , $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{8}$, $\dfrac{1}{16}$,.....

a. u_n = $\dfrac{1}{n}$

b. Voer in $n(min)$= 0 ; u_n = $\dfrac{1}{n}$; u_n(min) = 1 ; S_n = S_{n-1} + u_n = v_n = v_{n-1} + u ; v_n(min) = 1

Uit de tabel vinden we : S_{100} = v_{100} ≈ 5,187 en S_{200} ≈ 5,878

c. S_{500} ≈ 6,793 en S_{600} ≈ 6,975 De rij is waarschijnlijk niet begrensd.

d. $\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}>\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}=\tfrac{1}{2}$ Zo geldt ook :
$\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{13}+\tfrac{1}{14}+\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{16}>8.\tfrac{1}{16}=\tfrac{1}{2}$

e. We hebben gevonden :
$1+\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right)+\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}\right)+\left(\tfrac{1}{9}+.....+\tfrac{1}{16}\right)+....>1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}...$ Deze rij is dus duidelijk niet begrensd.

40. $u_n = (u_0 + vn).r^n$ en de somrij is : $S_n = \dfrac{u_0 - u_{n+1}}{1-r} + \dfrac{vr(1-r^{n+1})}{(1-r)^2}$

a. $\left.\begin{aligned} S_n &= u_0 + (u_0+v)r + (u_0+2v).r^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (u_0+nv).r^n \\ r.S_n &= \quad u_0 r + \quad (u_0+v)r^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (u_0+(n-1)v).r^n + (u_0+nv)r^{n+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$(1-r)S_n = u_0 + vr + vr^2 + \ldots\ldots\ldots + vr^n - (u_0+nv)r^{n+1} =$

$u_0 + vr + vr^2 + \ldots\ldots\ldots + vr^n + vr^{n+1} - vr^{n+1} - (u_0+nv)r^{n+1} =$

$u_0 + vr(1 + r \ + r^2 \ldots\ldots\ldots + r^n) - (u_0 + (n+1)v)r^{n+1} =$

$u_0 + vr(1 + r \ + r^2 \ldots\ldots\ldots + r^n) - u_{n+1} =$

$u_0 + vr.\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r} - u_{n+1} = u_0 - u_{n+1} + \dfrac{vr(1-r^{n+1})}{1-r}$

$\Rightarrow S_n = \dfrac{u_0 - u_{n+1}}{1-r} + \dfrac{vr(1-r^{n+1})}{(1-r)^2}$

b. $u_n = (2n+1).1,5^n \Rightarrow S_n = \dfrac{1.1,5^0 - (2(n+1)+1).1,5^{n+1}}{1-1,5} + \dfrac{2.1,5(1-1,5^{n+1})}{(1-1,5)^2} =$

$\dfrac{1-(2n+3).1,5^{n+1}}{-0,5} + \dfrac{3(1-1,5^{n+1})}{0,25} = -2 + 4n.1,5^{n+1} + 6.1,5^{n+1} + 12 - 12.1,5^{n+1} = 10 + (4n-6).1,5^{n+1}$

c. Als $|r| < 1$ dan gaat u_{n+1} en r^{n+1} naar nul voor grote waarden van n. $\Rightarrow$

$S = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{u_0 - u_{n+1}}{1-r} + \dfrac{vr(1-r^{n+1})}{(1-r)^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{u_0 - 0}{1-r} + \dfrac{vr(1-0)}{(1-r)^2}\right) = \dfrac{u_0}{1-r} + \dfrac{vr}{(1-r)^2}$

d. $1 + 3 \,.\, 0,5 + 5 \,.\, 0,5^2 + 7 \,.\, 0,5^3 + 9 \,.\, 0,5^4 + \ldots.$
Dit is een oneindige som van een reken-meetkundige rij met $|r| < 1$
Hier in is : $u_0 = 1$, $r = 0,5$, $v = 2$ $\Rightarrow$
$S = \dfrac{1}{1-0,5} + \dfrac{2.0,5}{(1-0,5)^2} = 2 + 4 = 6$

e. Gegeven $1 + 4x + 7x^2 + 10x^3 + 13x^4 + \ldots.. = 65$
Dit is een som van een reken-meetkundige rij. Hier is : $u_0 = 1$, $r = x$, $v = 3$
Je weet door het getal 65 dat de rij sommeerbaar is $\Rightarrow$
$S = 65 = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{3x}{(1-x)^2}$ Nu x oplossen . Vermenigvuldig links en rechts met $(1-x)^2$
$\Rightarrow 1 - x + 3x = 65(1-x)^2 \Leftrightarrow 1 + 2x = 65x^2 - 130x + 65 \Leftrightarrow 65x^2 - 132x + 64 = 0$
$\Rightarrow D = (-132)^2 - 4.65.64 = 784 \Rightarrow$

$x = \frac{132-28}{130} = 0{,}8$ of $x = \frac{132+28}{130} = \frac{16}{13}$ Aangezien de rij sommeerbaar is vervalt de oplossing $x = \frac{16}{13}$ want $\frac{16}{13} > 1 \Rightarrow x = 0{,}8$ is de gevraagde oplossing.

41. $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ met $f_1 = 1$ en $f_2 = 1$

a. $f_3 = f_2 + f_1 = 1+1 = 2$, $f_4 = f_3 + f_2 = 2+1 = 3$, $f_5 = f_4 + f_3 = 3+2 = 5$

$f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8$; $f_7 = 8 + 5 = 13$; $f_8 = 13 + 8 = 21$; $f_9 = 21 + 13 = 34$
$f_{10} = 34 + 21 = 55$

b. $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + f_5^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 40$ en $f_5 . f_6 = 5.8 = 40$

$\Rightarrow$ We zien dus dat de uitkomsten gelijk zijn.

c. De oppervlakten van de som van alle rechthoeken is gelijk aan de oppervlakte van de grote rechthoek . In de tekening zien we:

$$\left.\begin{array}{l} f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + f_5^2 + f_6^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 104 \\ f_6 . f_7 = 8.13 = 104 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + f_5^2 + f_6^2 = f_6 . f_7$

d. $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + ... + f_n^2 = f_n . f_{n+1}$

42. $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ met $f_0 = 0$ en $f_2 = 1$

a. $f_2 = 0 + 1 = 1$, $f_3 = 1 + 1 = 2$, $f_4 = 2 + 1 = 3$, $f_5 = 3 + 2 = 5$ enz. $\Rightarrow$ afgezien van $f_0 = 0$ zijn verder alle elementen hetzelfde als bij opgave 41.

b. $n=1 \Rightarrow \frac{f_2}{f_1}=\frac{1}{1}=1$, $n = 2 \Rightarrow \frac{f_3}{f_2}=\frac{2}{1}=2$, $n=3 \Rightarrow \frac{f_4}{f_3}=\frac{3}{2}=1,5$

$n=4 \Rightarrow \frac{f_5}{f_4}=\frac{5}{3}\approx 1,667$, $n = 5 \Rightarrow \frac{f_6}{f_5}=\frac{8}{5}=1,6$, $n=6 \Rightarrow \frac{f_7}{f_6}=\frac{13}{8}\approx 1,625$

$n=7 \Rightarrow \frac{f_8}{f_7}=\frac{21}{13}\approx 1,615$, $n = 8 \Rightarrow \frac{f_9}{f_8}=\frac{34}{21}\approx 1.619$, $n=9 \Rightarrow \frac{f_{10}}{f_9}=\frac{55}{34}\approx 1,618$

c. $f_n = p.a^n + q.b^n$ Nu dit invullen in de recursieve formule $\Rightarrow$

$p.a^{n+2} + q.b^{n+2} = p.a^{n+1} + q.b^{n+1} + p.a^n + q.b^n \Leftrightarrow$

$p.a^{n+2} + q.b^{n+2} - p.a^{n+1} - q.b^{n+1} - p.a^n - q.b^n = 0 \Leftrightarrow$

$p.a^n(a^2 - a - 1) + q.b^n(b^2 - b - 1) = 0$

d. Er geldt $p \neq 0$ en $q \neq 0$ en $a \neq 0$ en $b \neq 0$ Dus deze vergelijking is oplosbaar **voor alle waarden van *n*** als $a^2 - a - 1 = 0$ en $b^2 - b - 1 = 0$ .We noemen zo'n vergelijking een identieke vergelijking.

e. Nu *a* oplossen $\Rightarrow$ $a^2 - a - 1 = 0$ $D = (-1)^2 - 4.1.(-1) = 5$ $\Rightarrow a = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Voor *b* geldt dus ook : $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Er is verondersteld dat $a > b \Rightarrow$

$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

f. We gaan dit nu invullen $\Rightarrow$

$f_n = p.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + q.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \Rightarrow f_0 = p.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + q.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = p + q = 0 \Rightarrow$

$q = -p$

g. Nu weer invullen in de formule $\Rightarrow$

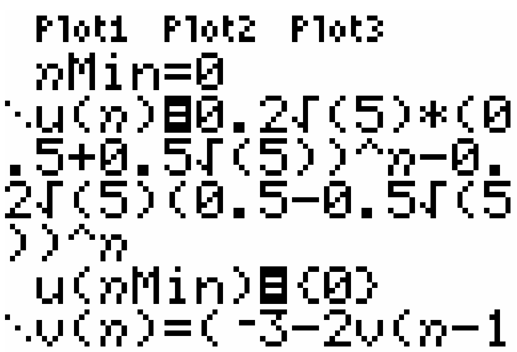
$f_n = p.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - p.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \Rightarrow f_1 = p.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - p.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \Leftrightarrow$

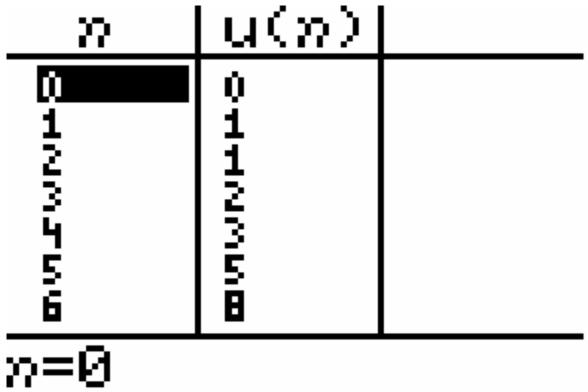
$p\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right) - p\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right) = 1 \Leftrightarrow p.\sqrt{5} = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

h. Deze formule invoeren in GR

(opmerking: $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} . \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{5} . \sqrt{5} = 0,2 . \sqrt{5}$





Zo zie je dat er inderdaad dezelfde waarden uitkomen als bij onderdeel a.